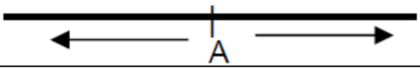
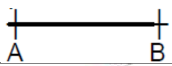
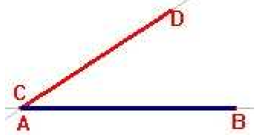
Formulario di geometria

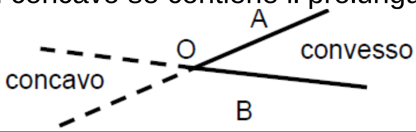
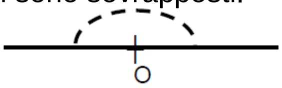
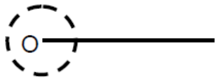
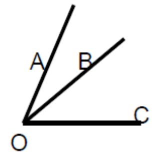
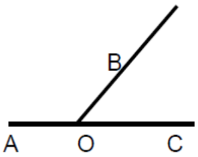
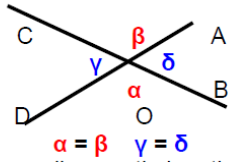
GEOMETRIA

Appunti di geometria piana da pag 3 a pag 10	Formulario geometria piana da pag 11 a pag18
Relazioni notevoli figure piane da pag 19 a pag 32	Formulario geometria solida da pag 33 a pag 44

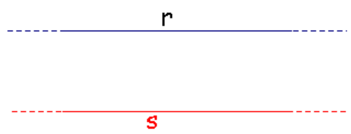
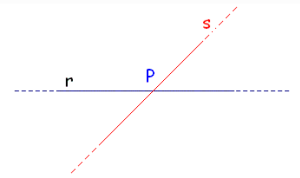
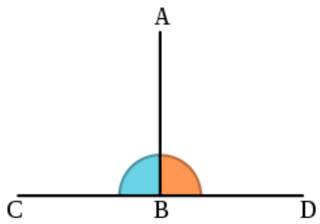
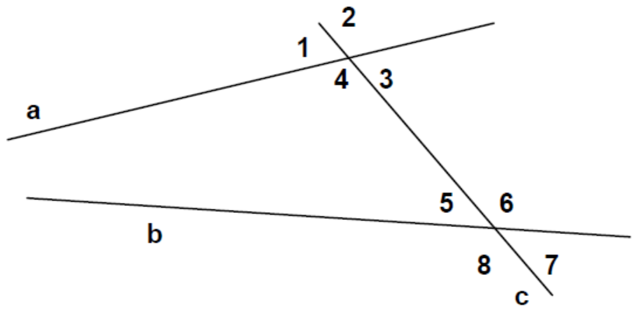
Figure piane		Figure solide		
S = area b = base	h = altezza π = 3,14159	St = area totale V = Volume	h = altezza del solido S = area	π = 3,141592

Geometria del piano: definizioni

Concetti fondamentali	
Elementi della geometria:	Gli elementi fondamentali della geometria sono il punto, la retta, il piano.
Concetto di punto :	Il concetto di punto viene suggerito dall'osservazione di un granello di sabbia o dalla punta di uno spillo. Il punto si indica con una lettera maiuscola.
Concetto di retta :	Il concetto di punto viene suggerito dall'osservazione di un filo teso, prolungato all'infinito da ambo le parti. Una retta si indica con una lettera dell'alfabeto minuscola, o con due lettere maiuscole indicanti due qualsiasi dei suoi punti.
Concetto di piano :	Il concetto di piano viene suggerito dall'osservazione della superficie levigata di un tavolo, prolungata all'infinito da ogni parte. Un piano si indica con una lettera dell'alfabeto greco (α = alfa, β = beta etc…)
Definizione di spazio :	Dicesi spazio l'insieme di tutti i punti esistenti
Definizione di figura :	Si chiama figura geometrica un qualsiasi gruppo di punti
Definizione di geometria :	La geometria è quella parte della scienza matematica che si occupa delle forme nel piano e nello spazio e delle loro mutue relazioni. La geometria piana è quella che tratta di figure costituite da punti di uno stesso piano; geometria solida, quella che tratta di figure costituite da punti non giacenti tutti sullo stesso piano , e cioè di figure nello spazio.
Postulato della retta :	Per due punti distinti passa una retta ed una sola. La retta è anche un insieme infinito di punti totalmente ordinati, nel senso che presi comunque due punti su di essa, possiamo sempre stabilire chi di essi viene "prima" e chi "dopo" e fra i due punti, vi sono infiniti punti intermedi.
Postulato del piano :	Data una retta qualsiasi di un piano, i punti del piano vengono da essa divisi in due gruppi o semipiani tali che : 1) ogni punto del piano appartiene all'uno o all'altro dei due semipiani 2) la retta che congiunge due punti situati in semipiani opposti incontra la retta data, in un punto compreso fra di essi, mentre la retta che congiunge due punti situati nello stesso semipiano non ha in comune con la retta data alcun punto.
Definizione di semiretta :	Data una retta orientata e fissato un punto P, si chiama semiretta l'insieme formato dal punto P e da tutti quelli che lo seguono, oppure che lo precedono (il punto P si dice origine della semiretta). Due semirette si dicono opposte se, essendo situate sulla stessa retta, hanno versi opposti 
Segmenti :	Un segmento è una parte di retta delimitata da due punti, detti estremi.  segmento AB
Segmenti consecutivi ed adiacenti :	 Due segmenti si dicono consecutivi se hanno solo un estremo in comune e nessun altro punto. Due segmenti si dicono adiacenti se, oltre ad essere consecutivi giacciono su di una stessa retta.   Due segmenti sono *sovrapposti* se hanno un estremo in comune e tutti i punti di uno (quello minore) sono in comune con i punti dell'altro segmento.

Concetti fondamentali	
Semipiano:	Si dice semipiano ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da una sua retta, detta *origine* dei semipiani.
Angolo:	Si dice angolo ciascuna delle due parti in cui viene diviso il piano da due semirette uscenti da uno stesso punto; le semirette vengono dette *lati dell'angolo* e la loro origine *vertice dell'angolo*. Osservazione : 1) Un angolo si può considerare generato dalla rotazione di una semiretta attorno ad un punto 2) Due punti interni ad un angolo sono estremi di un segmento tutto interno all'angolo, mentre un segmento che congiunge un punto interno con un punto esterno incontra certamente uno dei lati dell'angolo 3) Una retta passante per il vertice e per un punto interno ad un angolo lascia i lati da parti opposte, mentre una retta passante per il vertice e per un punto esterno, lascia i lati dalla stessa parte.
Angolo convesso e concavo:	Un angolo dicesi convesso se non contiene il prolungamento dei suoi lati; un angolo dicesi concavo se contiene il prolungamento dei suoi lati 
Angolo piatto e giro:	Un angolo si dice piatto quando i suoi lati sono semirette opposte; giro quando i lati sono sovrapposti.  angolo piatto  angolo giro
Angoli consecutivi, adiacenti, opposti al vertice:	Due angoli si dicono: 1) consecutivi quando hanno un lato in comune e gli altri due da parti opposte rispetto a questo lato; 2) adiacenti quando, oltre ad essere consecutivi hanno gli altri due lati sulla stessa retta e opposti; 3) opposti al vertice quando i lati dell'uno sono il prolungamento dei lati dell'altro; due angoli opposti sono congruenti.  Angoli consecutivi  angoli adiacenti  angoli opposti al vertice
Misura degli angoli:	Gli angoli possono misurarsi in : 1) gradi : un grado è la novantesima parte di un angolo retto 2) radianti : un radiante è la misura di un angolo al centro di una circonferenza che sottende un arco di lunghezza pari al raggio Relazione tra misure degli angoli espresse in gradi (α)e radianti (**r**) $\mathbf{360° : 2\pi = \alpha : r}$ da cui $r = \pi\alpha / 180°$ o $\alpha = 180° r / \pi$ se $\alpha < 90°(\pi/2)$ = **angolo acuto** se $\alpha = 90°(\pi/2)$ = **angolo retto** se $\alpha > 90°(\pi/2)$ = **angolo ottuso** se $\alpha = 180°(\pi)$ = **angolo piatto** se $\alpha = 360°(2\pi)$ = **angolo giro**
Angoli complementari:	Due angoli si dicono complementari se: $\alpha + \beta = 90°$
Angoli supplementari:	Due angoli si dicono supplementari se: $\alpha + \beta = 180°$ (es. angoli adiacenti)
Angoli esplementari	Due angoli si dicono esplementari se: $\alpha + \beta = 360°$

Geometria del piano: definizioni

Concetti fondamentali	
Rette parallele:	 Due rette si dicono parallele quando giacciono sullo stesso piano e non si incontrano mai; quando due rette sono parallele la loro distanza è sempre la stessa.
Rette incidenti:	Si dicono incidenti due rette *r* ed *s* che giacciono sullo stesso piano e hanno un punto P in comune: 
Rette perpendicolari :	Nel piano due rette incidenti si dicono perpendicolari quando formano quattro angoli uguali (che si dicono retti). 
Angoli formati da due rette tagliate da una trasversale:	 4 e 6 ; 3 e 5 sono detti alterni interni 2 e 8 ; 1 e 7 sono detti alterni esterni 1 e 5 ; 4 e 8 ; 2 e 6 ; 3 e 7 sono detti corrispondenti 4 e 5 ; 3 e 6 sono detti coniugati interni 1 e 8 ; 2 e 7 sono detti coniugati esterni
Angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale:	Due rette parallele tagliate da un trasversale formano angoli alterni interni congruenti, angoli alterni esterni congruenti, angoli corrispondenti congruenti, angoli coniugati interni ed esterni supplementari.

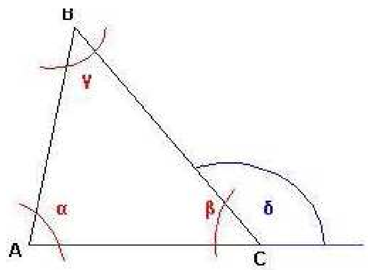
TRIANGOLO

Definizione e proprietà

Un triangolo è un poligono avente 3 lati. In ogni triangolo:

1)Ogni lato è sempre minore della somma degli altri due lati e maggiore della loro differenza.

2)La somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°, mentre un angolo esterno à uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti ad esso.



α **+** β **+** γ **= 180°**

δ **=** α **+** γ

α**,** β**,** γ = ampiezze angoli interni
δ **=** angolo esterno

3)In ogni triangolo il maggiore tra i lati è opposto al maggiore tra gli angoli e il minore tra i lati è opposto al minore tra gli angoli.

4)Se due lati sono uguali anche gli angoli opposti sono uguali.

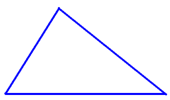
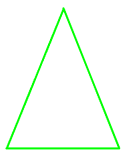
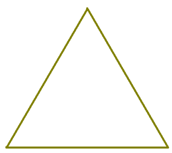
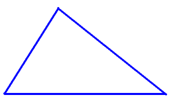
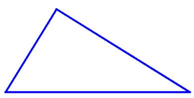
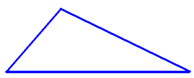
Classificazione

I triangoli si possono classificare in base ai lati oppure anche in base agli angoli. In base ai lati:

- scaleno se ha tutti i tre lati diversi tra loro;
- isoscele se ha due lati congruenti;
- equilatero se tutti i tre lati sono congruenti tra loro.

In base agli angoli:

- acutangolo se ha tutti i tre gli angoli acuti;
- rettangolo se uno dei tre angoli è retto;
- ottusangolo se uno dei tre angoli è ottuso.

 **scaleno**	 **isoscele** Nel triangolo isoscele il lato diverso dagli altri si chiama base. Gli angoli adiacenti alla base sono congruenti.	 **equilatero** Nel triangolo equilatero i tre angoli sono uguali e ognuno di essi misura 60°.
 **acutangolo**	 **rettangolo** Nel triangolo rettangolo, il lato opposto all'angolo retto è il lato maggiore e si chiama ipotenusa; i lati rimanenti sono detti cateti.	 **ottusangolo**

Elementi notevoli di un triangolo

Gli elementi notevoli di un triangolo sono:

- **l'altezza** che è il segmento di perpendicolare che unisce un vertice al suo lato opposto;
- la **mediana** che è il segmento che unisce un vertice al punto medio del lato opposto;
- la **bisettrice** che è una semiretta che parte da un vertice, dividendo l'angolo al vertice in due angoli congruenti;
- l'**asse** che è la perpendicolare al lato del triangolo, passante per il suo punto medio.

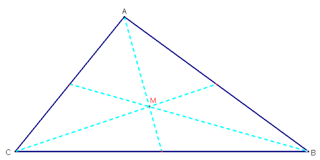
Ogni triangolo possiede 3 mediane, ed esse sono sempre interne al triangolo. Ogni triangolo possiede 3 altezze: una per ogni vertice. Nei triangoli acutangoli le altezze sono tutte interne, mentre in quelli ottusangoli le altezze che partono dagli angoli acuti sono esterne, quella relativa all'angolo ottuso è interna. Nei triangoli rettangoli le altezze relative agli angoli acuti coincidono con il cateto adiacente, mentre l'altezza relativa all'angolo retto è interna. In un triangolo equilatero la mediana, la bisettrice e l'altezza coincidono. In un triangolo isoscele la mediana, la bisettrice e l'altezza relative alla base coincidono.

Punti notevoli di un triangolo

- Il **baricentro** di un triangolo è il punto d'intersezione delle 3 mediane.
- L'**ortocentro** di un triangolo è il punto d'intersezione delle 3 altezze.
- L'**incentro** di un triangolo è il punto d'incontro delle 3 bisettrici degli angoli interni.
- Il **circocentro** di un triangolo è il punto d'intersezione dei 3 assi.

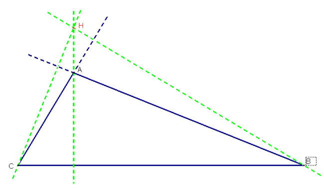
Baricentro

Il baricentro è sempre interno al triangolo.



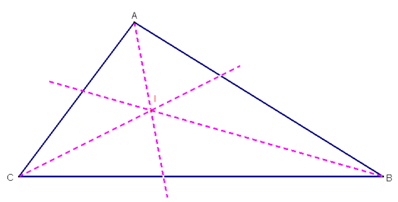
Ortocentro

L'ortocentro è interno nei triangoli acutangoli, esterno in quelli ottusangoli, mentre nei triangoli rettangoli coincide col vertice dell'angolo retto.



Incentro

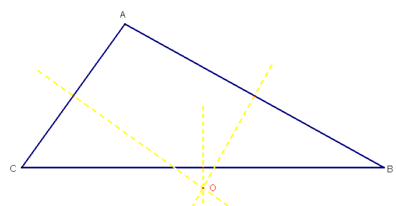
L'incentro è sempre interno al triangolo. L'incentro è equidistante dai tre lati del triangolo; per questo coincide con il centro della circonferenza inscritta al triangolo.



Circocentro

Il circocentro è interno nei triangoli acutangoli, esterno in quelli ottusangoli, mentre nei triangoli rettangoli coincide col punto medio dell'ipotenusa.

Il circocentro è equidistante dai tre vertici del triangolo; per questo coincide con il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.



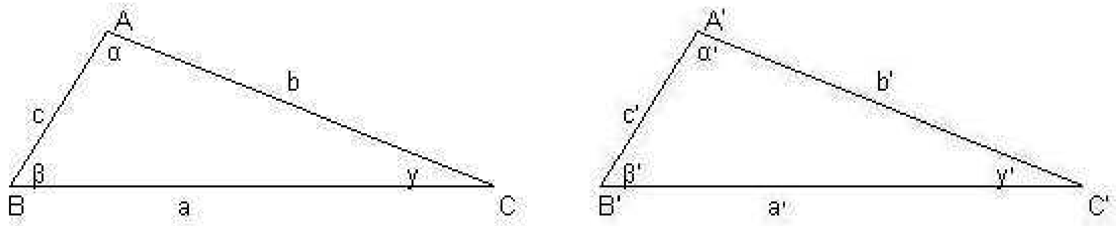
TRIANGOLO

Triangoli congruenti

Due figure geometriche sono congruenti (o sovrapponibili) se hanno la stessa forma e la stessa dimensione; cioè se è possibile sovrapporre le due figure, in modo tale che combacino perfettamente.

In alcuni casi, ad esempio nei triangoli, è sufficiente verificare che basta che solo alcuni elementi siano congruenti, per esser certi che le intere figure siano congruenti.

Criteri di congruenza dei triangoli:



1°criterio di congruenza	*2°criterio di congruenza*	*3°criterio di congruenza*
Due triangoli che hanno rispettivamente congruenti 2 lati e l'angolo fra di essi compreso, sono congruenti, cioè se hanno: $b = b'$; $c = c'$; $\alpha = \alpha'$ sono congruenti.	Due triangoli che hanno rispettivamente congruenti 2 angoli e il lato fra di essi compreso, sono congruenti, cioè se hanno: $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $c = c'$ sono congruenti.	Due triangoli che hanno rispettivamente congruenti i 3 lati, sono congruenti, cioè se hanno: $a = a'$; $b = b'$; $c = c'$ sono congruenti.

Criteri di congruenza dei triangoli rettangoli

1°criterio di congruenza

Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente congruenti 2 cateti, sono congruenti.

2°criterio di congruenza

Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente congruenti 1 angolo acuto e il cateto adiacente, sono congruenti.

3°criterio di congruenza

Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente congruenti 1 angolo acuto e il cateto opposto, sono congruenti.

4°criterio di congruenza

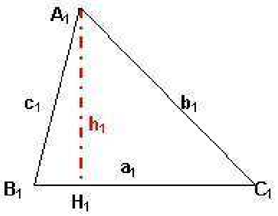
Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente congruenti 1 cateto e l'ipotenusa, sono congruenti.

Triangoli simili

Due figure geometriche sono simili se hanno la stessa forma. Per esser più precisi due figure sono simili se hanno:

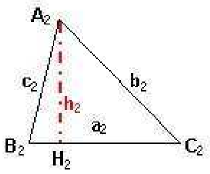
1. tutti gli angoli interni rispettivamente congruenti;
2. tutti i lati rispettivamente in proporzione.

Nel caso specifico dei triangoli A_1 B_1 C_1 e $A_1'B_1'C_1'$, si dicono simili se hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi in proporzione.



$\mathbf{A_1 = A_2 \;\; B1 = B_2 \;\; C_1 = C_2}$

$\mathbf{a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2}$



Ricordiamo che due lati di due triangoli simili si dicono corrispondenti od omologhi quando sono opposti ad angoli uguali.

Criteri di similitudine per triangoli qualunque.

1°criterio di similitudine	2°criterio di similitudine	3°criterio di similitudine
Due triangoli che hanno gli angoli ordinatamente congruenti sono simili. Se $\mathbf{A_1 = A_2, \;\; B_1 = B_2, \;\; C_1 = C_2}$ i triangoli sono simili.	*Se due triangoli hanno rispettivamente in proporzione due lati e se l'angolo fra di essi compreso è congruente, sono simili. Se* $\mathbf{A_1 = A_2 \;\; e \;\; b_1 : b_2 = c_1 : c_2}$ i triangoli sono simili.	*Due triangoli che hanno rispettivamente in proporzione i 3 lati, sono simili. Se* $\mathbf{a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2}$ i triangoli sono simili.

Proprietà dei triangoli simili

1) In due triangoli simili i perimetri stanno come due lati omologhi

$$\mathbf{2p_1 : 2p_2 = a_1 : a_2}$$

2) In due triangoli simili le altezze relative a due lati omologhi stanno come due lati omologhi

$$\mathbf{h_1 : h_2 = a_1 : a_2}$$

3) Le aree di due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati costruiti su due lati omologhi o su due altezze omologhe.

$$\mathbf{S_1 : S_2 = a_1^2 : a_2^2 = h_1^2 : h_2^2}$$

POLIGONI CONVESSI

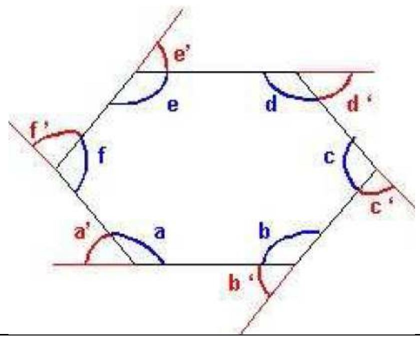
Proprietà angoli interni ed esterni di un poligono convesso

Indicando con n il numero dei lati del poligono si ha:

1) La somma delle ampiezze degli angoli interni di un poligono convesso è **(n – 2) 180°**
2) La somma delle ampiezze degli angoli esterni è **360°**, qualunque sia il numero dei lati
3) L'ampiezza di ciascun angolo interno di un poligono equiangolo di n lati è

(n – 2)180°: n

4) L'ampiezza di ciascun angolo esterno di un poligono equiangolo di n lati è **360°: n**



Nel caso della figura a lato: esagono equiangolo si ha:

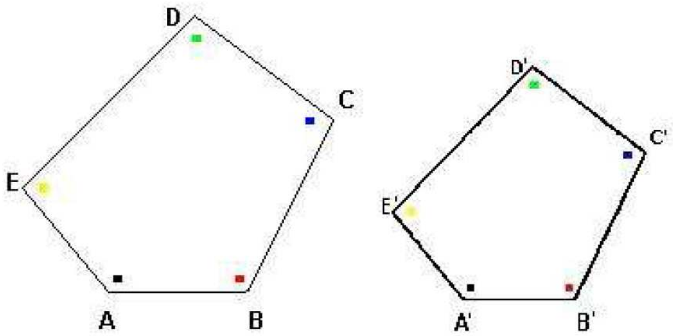
a + b + c + d + e + f = (6 – 2)180°= (4) 180°= **720°**

a' + b' + c' + d' + e' + f ' = **360°**

a = (4) 180°/ 6 = 720°/ 6 = **120°**

a' = 360°/ 6 = **60°**

Similitudine



1) Due poligoni si dicono simili quando hanno gli angoli rispettivamente uguali e i lati omologhi proporzionali.

A = A' ; B = B' ; C = C' ; D = D' ; E = E'

AB : A'B' = BC : B'C' = CD : C'D' = DE : D'E' = EA : E'A'

2) I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro come due lati omologhi

2p : 2p' = AB : A'B'

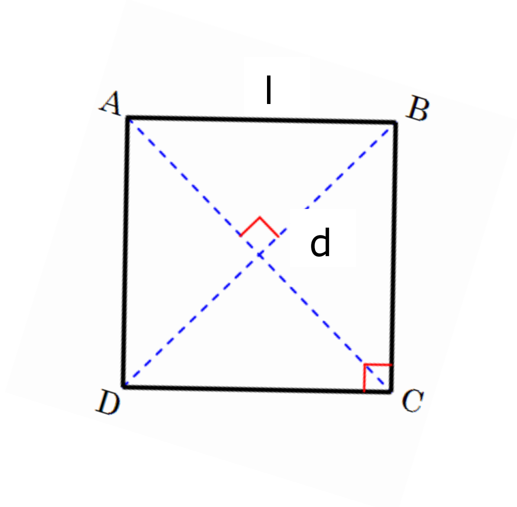
3) Se due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili allora i loro perimetri, i loro raggi , le loro apoteme stanno fra loro come due lati omologhi

2p : 2p' = r : r ' = a : a' = AB : A'B'

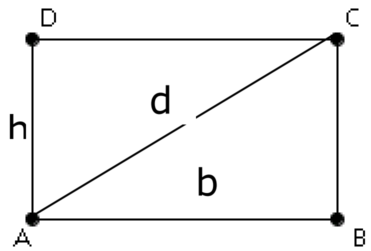
4) Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati costruiti su due lati omologhi

$$S : S' = (AB)^2 : (A'B')^2$$

QUADRATO

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
Il quadrato è un quadrilatero regolare, cioè un poligono con quattro lati uguali e quattro angoli uguali (tutti retti).</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>l = lato
d = diagonale</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Formule dirette</td><td>$P = l \times 4$
$A = l \times l = l^2$
$A = d^2 / 2$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$l = P/4$
$l = \sqrt{A}$
$d = \sqrt{2A}$</td></tr>
<tr><td>Relazioni notevoli</td><td>$d = l\sqrt{2}$
$l = d / \sqrt{2}$</td></tr>
</table>

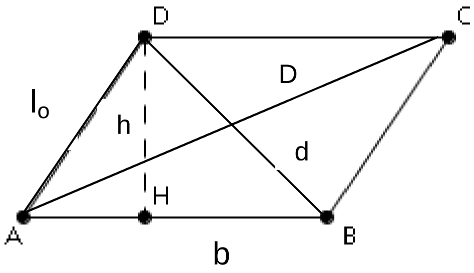
RETTANGOLO

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
Il rettangolo è un quadrilatero con tutti gli angoli uguali (e quindi retti).</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>b = base
h = altezza
d = diagonale</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>$P = b + h + b + h$
$A = b \times h$
$d = \sqrt{b^2 + h^2}$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$b = P/2 - h$
$h = P/2 - b$
$b = A / h$
$h = A / b$</td></tr>
</table>

PARALLELOGRAMMO

Definizione e proprietà

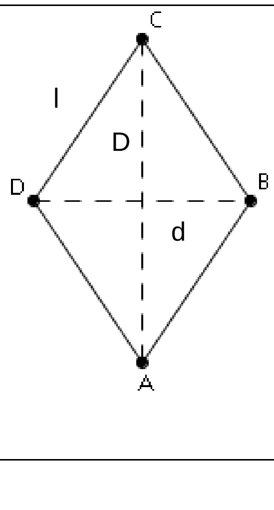
Dicesi **parallelogramma** un quadrilatero con i lati opposti paralleli. In un parallelogramma:
1) I lati opposti sono uguali e paralleli;
2) Gli angoli opposti sono uguali e quelli adiacenti supplementari (somma pari a 180°)
3) Ogni diagonale scompone il parallelogramma in due triangoli uguali.
4) Le diagonali si tagliano scambievolmente per metà.

Figura	Nomenclatura specifica	b = base l_o = lato obliquo h = altezza D = diagonale maggiore d = diagonale minore
	**Formule dirette**	**$P = b + l_o + b + l_o$** **$A = b \times h$**
	Formule inverse	**$B = P/2 - l_o$** **$l_o = P/2 - b$** **$b = A/h$** **$h = A/b$**

ROMBO

Definizione e proprietà

Dicesi **rombo** un parallelogramma con quattro lati uguali. In un rombo:
1) gli angoli opposti sono uguali e gli adiacenti supplementari (somma pari a 180°);
2) Le diagonali si tagliano scambievolmente a metà e sono fra loro perpendicolari;
3) Le diagonali sono bisettrici degli angoli, i cui vertici sono gli estremi delle diagonali.

Figura	Nomenclatura specifica	l = lato d = diagonale minore D = diagonale maggiore
	**Formule dirette**	**$P = l \times 4$** **$A = (D \times d)/2$** **$l = \sqrt{(d/2)^2 + (D/2)^2}$**
	Formule inverse	**$l = P/4$** **$D = (2 \times A)/d$** **$d = (2 \times A)/D$**

TRAPEZIO

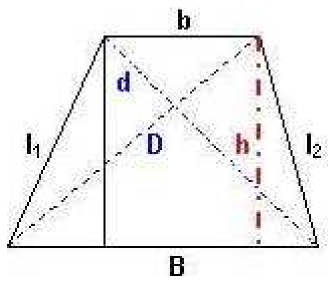
<table>
<tr><td colspan="3">

Definizione e classificazione

Un trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli. I due lati paralleli *b* e *B* sono chiamati **basi del trapezio**, mentre gli altri due lati l_1 e l_2 vengono detti **lati obliqui del trapezio**. La distanza *h* fra i due lati paralleli si dice **altezza del trapezio**.

Un trapezio si dice isoscele quando ha i lati obliqui e gli angoli alle basi uguali. Un trapezio si dice rettangolo quando ha un lato perpendicolare alle basi. Un trapezio si dice scaleno quando ha i lati obliqui disuguali.

</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>b = base minore
B = base maggiore
l = lato obliquo
d = diagonale minore (nel trapezio isoscele sono uguali)
D = diagonale maggiore</td></tr>
<tr><td rowspan="2">



</td><td>Formule dirette</td><td>

$P = B + b + l_1 + l_2$

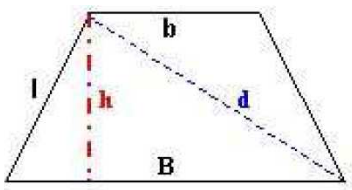
$$A = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>

$$(B+b) = \frac{A\times 2}{h}$$

$$h = \frac{A\times 2}{(B+b)}$$

</td></tr>
<tr><td>

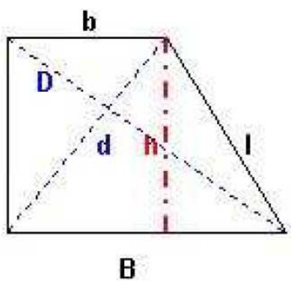


</td><td>Formule per il trapezio isoscele</td><td>

$l^2 = h^2 + [(B - b)/2]^2$

$d^2 = h^2 + [(B + b)/2]^2$

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>Formule per il trapezio rettangolo</td><td>

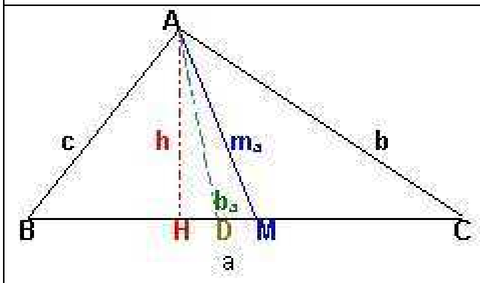
$l^2 = h^2 + (B - b)^2$

$D^2 = h^2 + B^2$

$d^2 = h^2 + b^2$

</td></tr>
</table>

TRIANGOLO

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
Un triangolo è un poligono avente 3 lati.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>a, b, c lati del triangolo
p = semiperimetro
2p = perimetro
h = altezza
m_a= mediana relativa al lato BC
b_a= bisettrice relativa all’angolo Â
A = area</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule dirette</td><td>2p = a + b + c

A = ah / 2 (base per altezza diviso 2)

$m_a=(\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}) / 2$

$m_b=(\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}) / 2$

$m_c=(\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}) / 2$

$b_a=(2\sqrt{bc\, p(p - a)}) / (b + c)$

$b_b=(2\sqrt{ac\, p(p - b)}) / (a + c)$

$b_c=(2\sqrt{ab\, p(p - c)}) / (a + b)$</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule inverse</td><td>a = 2p – b – c
b = 2p – a – c
c = 2p – a – b
a(base) = 2A / h
h = 2A / a</td></tr>
<tr><td colspan="3">Relazioni notevoli - Area in funzione dei lati (formula di Erone)

$S = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}$</td></tr>
</table>

POLIGONO REGOLARE

<table>
<tr><td colspan="3">

Definizione e proprietà

Un poligono dicesi regolare quando ha i lati e gli angoli uguali. Ad ogni poligono regolare si può circoscrivere ed inscrivere una circonferenza. Le due circonferenze hanno lo stesso centro (detto: **centro del poligono**). Si chiama **apotema (a)**, il raggio della circonferenza inscritta. Si chiama **raggio del poligono (r)**, il raggio della circonferenza circoscritta.

Il triangolo equilatero è un poligono regolare con tre lati, il quadrato quello con 4 lati, il pentagono regolare quello con 5 lati, l' esagono regolare quello con 6 lati, il decagono regolare quello con 10 lati.

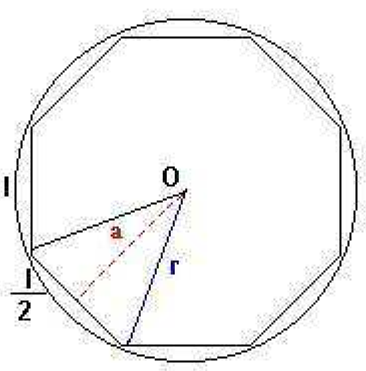
</td></tr>
<tr><td>

Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>

r = raggio cerchio circoscritto
P = perimetro
a = apotema
n = numero dei lati
l= lato
l_3 = lato triangolo equilatero
l_4 = lato quadrato
l_5 = lato pentagono regolare
l_6 = lato esagono regolare
l_{10} = lato decagono regolare

</td></tr>
<tr><td rowspan="2">



</td><td>

Formule dirette

</td><td>

P = l x n

A = (P x a) /2

</td></tr>
<tr><td>

Formule inverse

</td><td>

l = P/n

P = 2A/a

a = 2A/P

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Relazioni fra i lati e i raggi dei cerchi circoscritti

N.B. Congiungendo i vertici di un esagono reg. con il centro otteniamo sei triangoli equilateri di lato l.

</td></tr>
<tr><td>

Relazioni notevoli

</td><td colspan="2">

$\mathbf{r = \sqrt{a^2 + (l/2)^2}}$

$\mathbf{l_3 = r\sqrt{3}}$

$\mathbf{l_4 = r\sqrt{2}}$

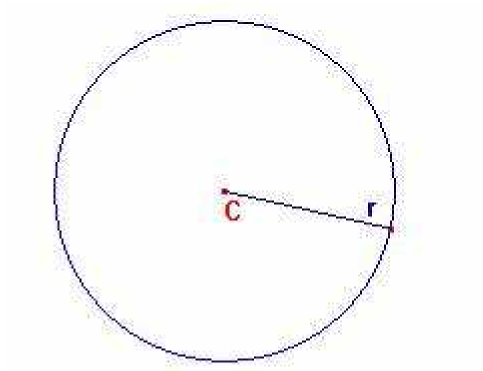
$\mathbf{l_5 = [\,r(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\,] / 2}$

$\mathbf{l_6 = r}$

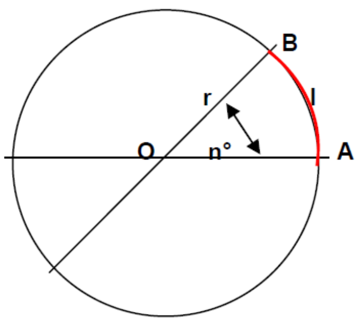
$\mathbf{l_{10} = [\,r\,(\sqrt{5} - 1)\,] / 2}$

</td></tr>
</table>

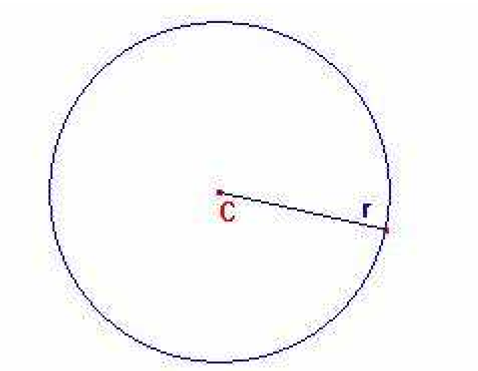
CIRCONFERENZA

Si definisce circonferenza il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso C detto centro. La distanza viene detta RAGGIO della circonferenza.		
Figura	Nomenclatura specifica	C = Circonferenza r = raggio π = pi greco (=3,14)
	**Formule dirette**	**$C = 2 \pi r$**
	Formule inverse	**$r = C/2\pi$**

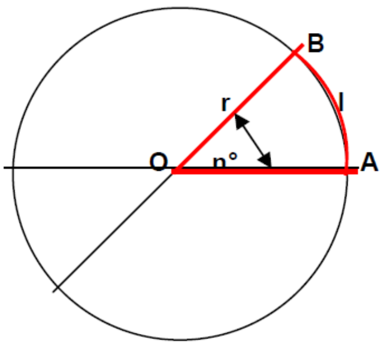
ARCO

Figura	Nomenclatura specifica	l = misura dell'arco r = raggio della circonferenza n°= misura, in gradi dell'angolo al centro
	**Formule dirette**	**$2\pi r : 360° = l : n°$** quindi **$l = (\pi r n°) / 180°$**
	Formule inverse	**$n° = 180° l / \pi r$** **$r = 180° l / \pi n°$**

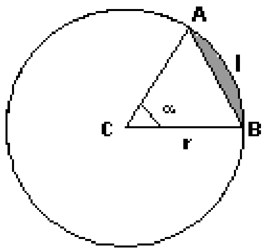
CERCHIO

Il cerchio è quella porzione di piano delimitata da una circonferenza.		
Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio π = pi greco (=3,14)
	**Formule dirette**	**$A = \pi r^2$**
	Formule inverse	**$r = \sqrt{(A / \pi)}$**

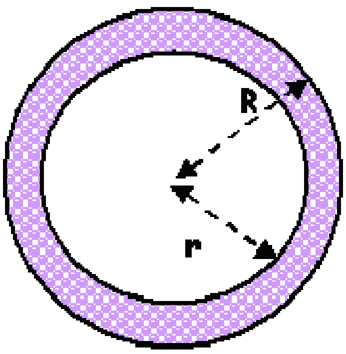
SETTORE CIRCOLARE

Il *settore circolare* è la porzione di un cerchio racchiusa da due raggi e da un arco di circonferenza.		
Figura	Nomenclatura specifica	l = lunghezza dell'arco r = raggio della circonferenza n° = ampiezza angolo al centro del settore
	**Formule dirette**	Dalle proporzioni: **$l : \pi r = n° : 180°$** **$A : \pi r^2 = n° : 360°$** Otteniamo : **$A = (\pi r^2 n°) / 360$** **$A = lr / 2$**
	Formule inverse	**$r = \sqrt{(360° A / \pi n°)}$** **$n° = 360° A / \pi r^2$** **$l = 2A / r$** **$r = 2A / l$**

SEGMENTO CIRCOLARE AD UNA BASE

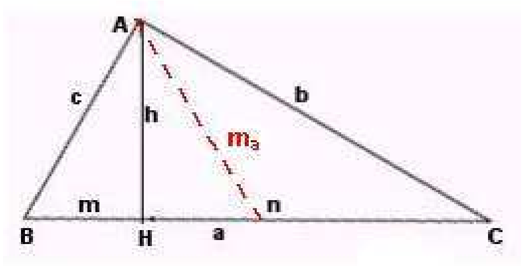
Si chiama **segmento circolare** la parte di piano compresa tra un arco e la rispettiva corda.		
Figura	Nomenclatura specifica	P=Perimetro (AB + l), S=Superficie, r=raggio, l=Lunghezza dell'arco
	**Formule dirette**	$\mathbf{S = [(\pi\, r^2\, \alpha) /360] - (r^2 sen\, \alpha) / 2}$ $\mathbf{p = [(\pi\, r\, \alpha) / 180] + 2r sen\, (\alpha / 2)}$

CORONA CIRCOLARE

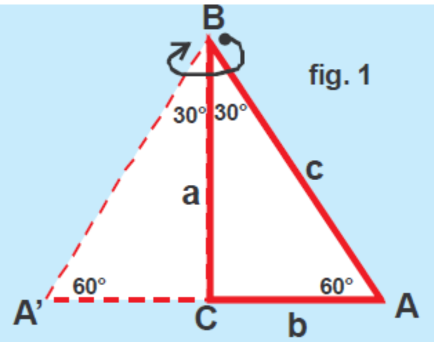
Una **corona circolare** o **anello** è un insieme di punti del piano compresi tra due cerchi concentrici.		
Figura	Nomenclatura specifica	R = raggio del cerchio maggiore r = raggio del cerchio minore
	**Formule dirette**	$\mathbf{S = \pi\, (R^2 - r^2) =}$ $\mathbf{= \pi\, (R - r)(R + r)}$ $\mathbf{2p = 2\, \pi\, (R + r)}$

Triangoli rettangoli – Teorema di Pitagora

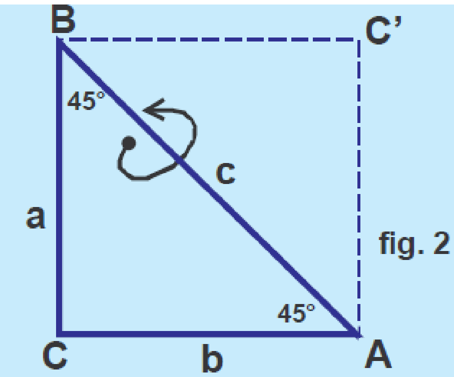
In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui due cateti.

Figura 	Nomenclatura specifica	a = ipotenusa b e c = cateti A = area
	Formule dirette	$\mathbf{a = \sqrt{b^2 + c^2}}$ **A = ah/2 =bc/2**
	Formule inverse	$\mathbf{b = \sqrt{a^2 - c^2} =}$ $\mathbf{c = \sqrt{a^2 - b^2}}$ **b = 2A/c; c = 2A/b**
La mediana relativa all'ipotenusa è uguale al raggio del cerchi circoscritto al triangolo e, quindi, alla metà dell'ipotenusa. $\mathbf{m_a = a/2}$	**Relazioni notevoli**	**ah = bc = 2A** **ah = bc da cui h = bc/a**

Triangoli rettangoli con angoli di 30° e 60°

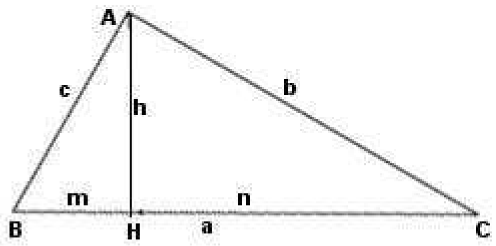
<table>
<tr><td colspan="3">Ruotando il triangolo rettangolo ABC intorno a BC si ottiene un triangolo equilatero</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>c = ipotenusa
b = cateto opposto all’angolo di 30°
a = cateto opposto all’angolo di 60°</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>Dato b si ha:
c = 2b; a = √3 b
Dato c si ha:
b = c/2; a = √3 c/2
Dato a si ha:
c = 2√3 a/3; b = √3 a/3</td></tr>
</table>

Triangoli rettangoli isosceli con angoli di 45°

<table>
<tr><td colspan="3">Ruotando il triangolo rettangolo ABC intorno ad AB si ottiene un quadrato</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>c = ipotenusa
a = b = cateti opposti all’angolo di 45°</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>Dato a si ha:
c = √2 a
Dato c si ha:
a = √2 c / 2</td></tr>
</table>

Triangoli rettangoli – 1°Teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

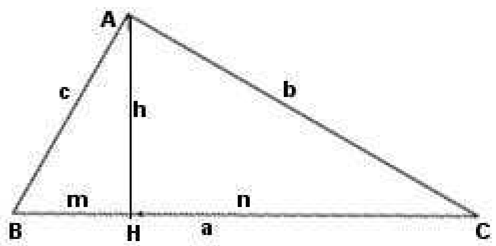
<table>
<tr><td rowspan="2">Figura
</td><td>Nomenclatura specifica</td><td colspan="2">a = ipotenusa
b e c = cateti
n = proiezione di b sull’ipotenusa
m= proiezione di c sull’ipotenusa</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>a:b=b:n

$b^2 = a\,n$
$a = b^2 / n$</td><td>a:c=c:m

$c^2 = a\,m$
$a = c^2 / m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule inverse</td><td>$b = \sqrt{a\,n}$
$n = b^2 / a$</td><td>$c = \sqrt{a\,m}$
$m = c^2 / a$</td></tr>
<tr><td colspan="4">Relazioni notevoli
Dividendo membro a membro le ultime due relazioni delle formule inverse otteniamo:
$n / m = b^2 / c^2$
e cioè il rapporto delle proiezioni dei due cateti sulla ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato del rapporto dei corrispondenti cateti.</td></tr>
</table>

Triangoli rettangoli – 2°Teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo l'altezza è media proporzionale tra le 2 proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

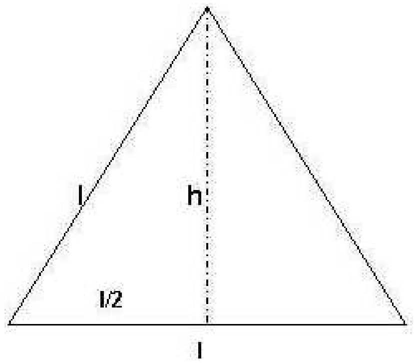
<table>
<tr><td rowspan="2">Figura
</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>a = ipotenusa
b e c = cateti
n = proiezione di b sull’ipotenusa
m= proiezione di c sull’ipotenusa
h=altezza relativa all’ipotenusa</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>m:h=h:n

$h^2 = m\,n$</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule inverse</td><td>$m = h^2 / n$

$n = h^2 / m$

$h = \sqrt{m\,n}$</td></tr>
</table>

TRIANGOLO EQUILATERO

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Figura

</td>
<td>Nomenclatura specifica</td>
<td>h = altezza
l = lato del triangolo
S = area
P = perimetro
Tutti gli angoli uguali a 60°</td>
</tr>
<tr>
<td>Formule dirette</td>
<td>Dato l si ha:
$h = (l\sqrt{3}) / 2 = 0{,}8660\ l$

$S = (l2\ \sqrt{3}) / 4 = h2\sqrt{3} / 3$

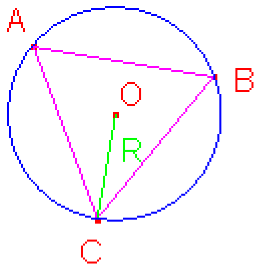
$P = 3l$

Data h si ha:
$l = 2h / \sqrt{3} = (2h\ \sqrt{3}) /3 =$
$= h / 0{,}8660$

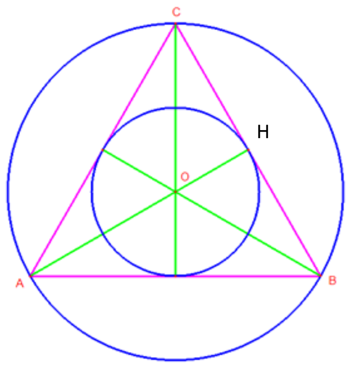
$S = h^2\sqrt{3} / 3$

$P = 2h\sqrt{3}$</td>
</tr>
</table>

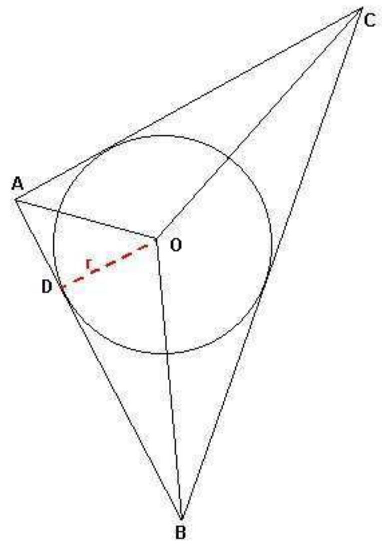
TRIANGOLO EQUILATERO inscritto

Figura 	Nomenclatura specifica	h = altezza OC = R = raggio della circonferenza l = lato del triangolo S = area P = perimetro
	Formule dirette	**$l = \sqrt{3}\ R$** **$A = 3\ \sqrt{3}\ R^2$** **$P = 3\ \sqrt{3}\ R$**
	Formule inverse	**$R = \sqrt{3}\ l\ /\ 3$**

TRIANGOLO EQUILATERO CIRCOSCRITTO

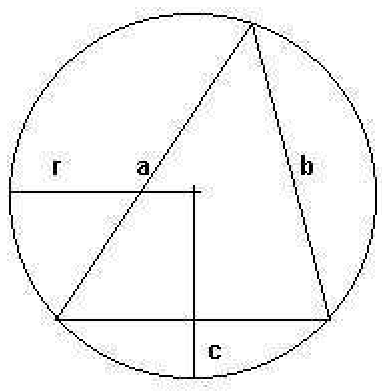
Figura 	Nomenclatura specifica	AH = h = altezza OH = r = raggio della circonferenza l = lato del triangolo S = area P = perimetro
	Formule dirette	**$h = 3\ r$** **$l = 2\ \sqrt{3}\ r$** **$A = 12\ \sqrt{3}\ r^2$** **$P = 18\ r$**
	Formule inverse	**$r = h\ /\ 3$**

TRIANGOLO QUALSIASI – Raggio della circonferenza inscritta

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
Dicesi circonferenza inscritta ad un triangolo la circonferenza tangente a tutti i lati del triangolo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>r = raggio del cerchio inscritto
A = area del triangolo
p = semiperimetro del triangolo</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>r = A / p</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>A = rp

p = A/r</td></tr>
</table>

Triangolo qualsiasi – Raggio della circonferenza circoscritta

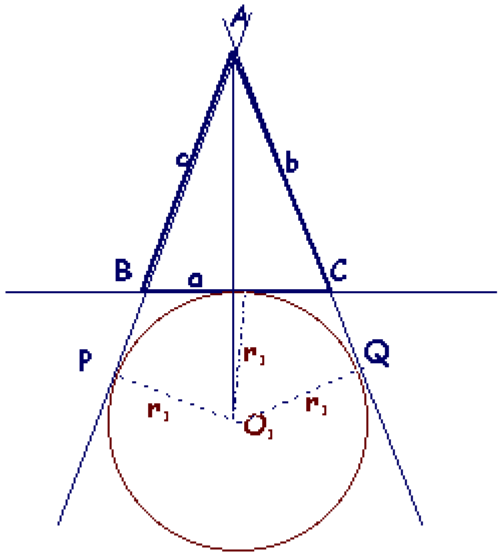
<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
Dicesi circonferenza circoscritta ad un triangolo la circonferenza passante per tutti i vertici del triangolo.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>r = raggio del cerchio circoscritto
A = area del triangolo
a, b, c = lati del triangolo</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>r = abc / 4A</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>A= abc/4r

a= 4Ar/bc

b= 4Ar/ac

c= 4Ar/ab</td></tr>
</table>

Triangoli qualsiasi – Raggio della circonferenza exinscritta

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione
La circonferenza exinscritta è la circonferenza tangente ad un lato del triangolo e ai prolungamenti degli altri due:</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>$r_1 = r_a$ = raggio del cerchio exinscritto sul lato a

r_b = raggio del cerchio exinscritto sul lato b

r_c = raggio del cerchio exinscritto sul lato c

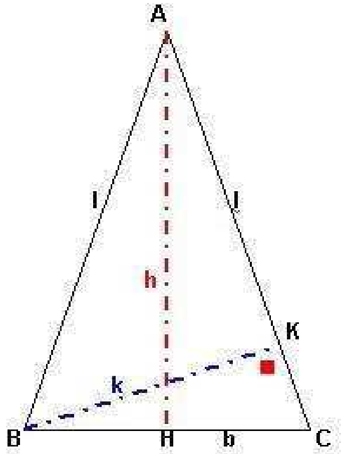
S = area del triangolo

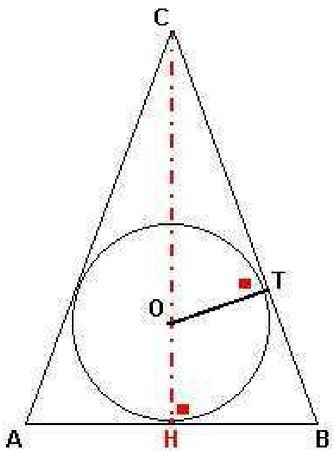
p = semiperimetro del triangolo</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>$\mathbf{r_a = S / (p - a)}$

$\mathbf{r_b = S / (p - b)}$

$\mathbf{r_c = S / (p - c)}$</td></tr>
</table>

TRIANGOLO ISOSCELE - TRIANGOLO ISOSCELE CIRCOSCRITTO

<table>
<tr><td colspan="3">Definizione e proprietà
Il triangolo isoscele è un triangolo che ha due lati uguali o equivalentemente un triangolo che ha due angoli uguali.
In un triangolo isoscele:
1) la bisettrice dell’angolo al vertice, l’altezza e la mediana relative alla base coincidono;
2) le altezze relative ai lati uguali sono uguali, come pure le mediane relative a quei lati e le bisettrici degli angoli alla base.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Figura

</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>h = altezza
l = lato del triangolo
b = base del triangolo
S = area
k = altezza relativa ad un lato
■ = angolo retto</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>$l = \sqrt{b^2/4 + h^2}$

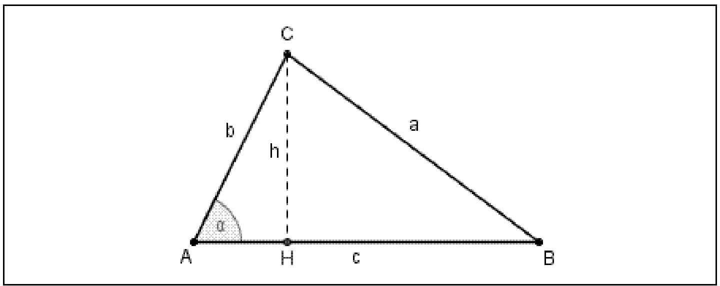
S = bh/2 = lk/2</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>k = bh / l</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Relazioni notevoli</td><td>$l^2 = h^2 + (b/2)^2$

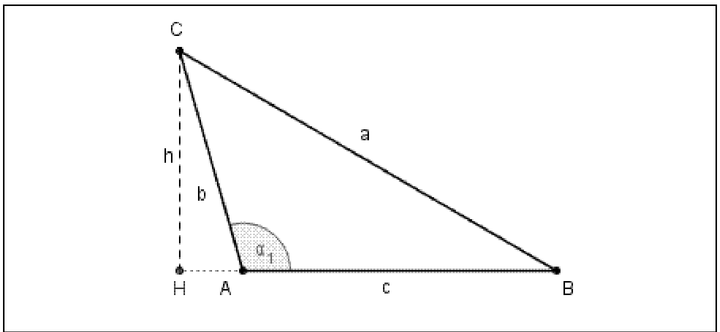
CT = l – b/2

Dai triangoli simili COT e CHB si ha :

l : h – r = b/2 : r =
= h : l – b/2</td></tr>
</table>

TEOREMA DI PITAGORA GENERALIZZATO
(per i triangoli qualsiasi)

<table>
<tr><td colspan="3">Enunciato
Il quadrato costruito su un lato di un triangolo qualunque e' uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati diminuito oppure aumentato, del doppio rettangolo che ha per dimensione uno dei due lati e la proiezione dell'altro lato su esso, a seconda che il lato considerato e opposto ad un angolo acuto (angolo < di 90 gradi) o ottuso (angolo > di 90 gradi e < di 180 gradi).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Figura


$\alpha < 90°$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot (\overline{AH})$


$90° < \alpha_1 < 180°$ $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (\overline{AH})$</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>a, b e c = lati del triangolo
α = angolo acuto
AH = proiezione di b su c</td></tr>
<tr><td>Formule dirette</td><td>Se α = angolo acuto
a = $\sqrt{b^2 + c^2 - 2cAH}$
Se α = angolo ottuso
a = $\sqrt{b^2 + c^2 + 2cAH}$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>Se B = angolo acuto
b = $\sqrt{a^2 - c^2 + 2cAH}$
Se B = angolo ottuso
b = $\sqrt{a^2 - c^2 - 2cAH}$</td></tr>
</table>

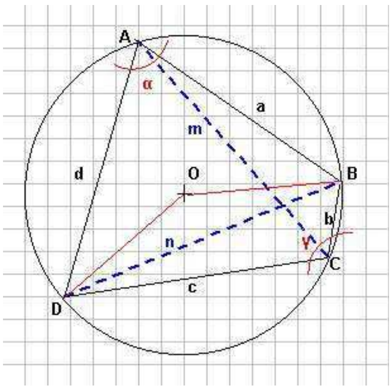
QUADRILATERO CONVESSO INSCRITTO IN UNA CIRCONFERENZA
(Teorema di Tolomeo)

Definizione e proprietà

Un quadrilatero si dice inscritto in una circonferenza quando i suoi vertici stanno sulla circonferenza.

In un quadrilatero inscritto in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari.

Teorema di Tolomeo.Dato un quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma dei prodotti dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali.

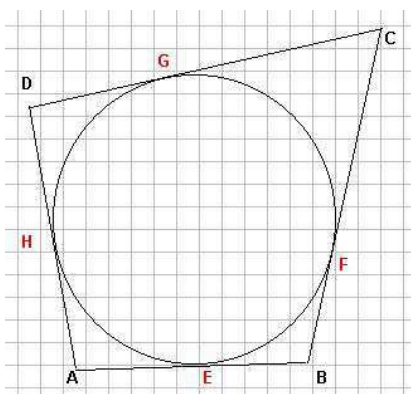
Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio circoscritto a, b, c, d = lati del quadrilatero m, n = diagonali del quadrilatero
	**Formule dirette**	**mn = bd + ac**
	Relazioni notevoli	α **+** γ **= 180°**

QUADRILATERO CONVESSO CIRCOSCRITTO AD UNA CIRCONFERENZA

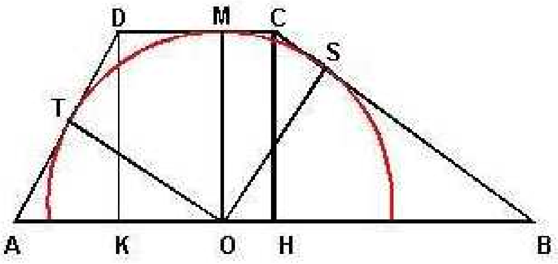
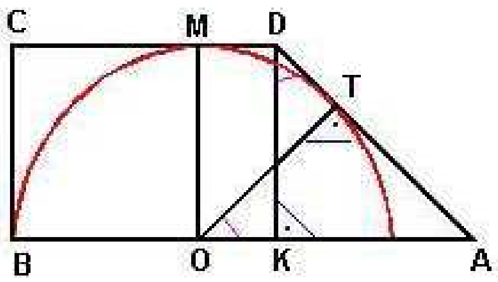
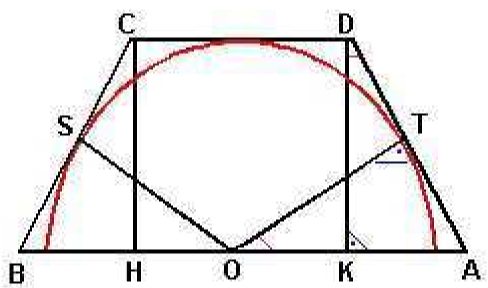
Definizione e proprietà

Un quadrilatero si dice circoscritto ad una circonferenza quando i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

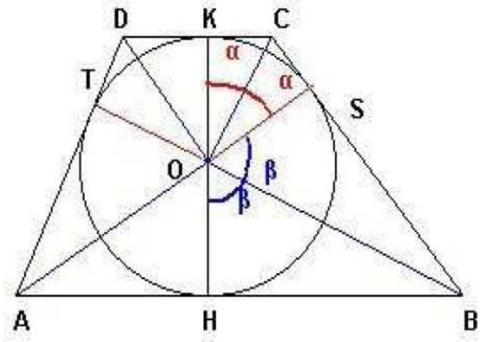
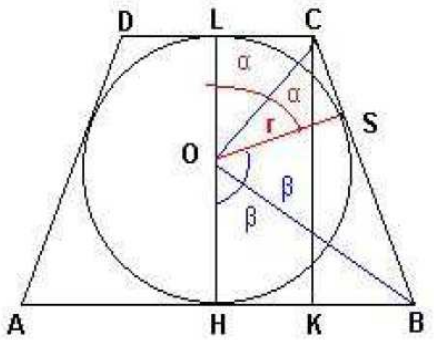
In un quadrilatero circoscritto ad una circonferenza, la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due

Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio del cerchio circoscritto AB, CD, AD, BC = lati del quadrilatero
	**Formule dirette**	**AB + DC = AD + BC**

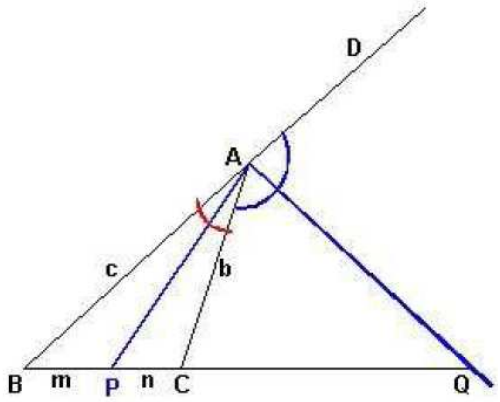
TRAPEZI CIRCOSCRITTI A SEMICIRCONFERENZE
(relazioni notevoli)

Figura 	Sia ABCD un trapezio circoscritto ad una semicirconf. di centro O. Indichiamo con S, M, T i punti di contatto dei lati BC, CD, DA, con la semicirconferenza e con H, K, le proiezioni dei vertici C, D, sulla retta AB. Osserviamo che i triangoli rettangoli CHB, OSB sono uguali per avere l'angolo B comune e i cateti CH, OS uguali perché entrambi uguali al raggio OM della semicircon. Si ha quindi: **CH = OS; HB = SB; CB = OB** Analogamente, sono uguali i triangoli DKA, OTA, per cui si ha pure **DK = OT; KA = TA; DA = OA** Applicando il teor. di Pitagora ai triangoli rettangoli CHB e DKA, otteniamo: $\mathbf{HB^2 = CB^2 - HC^2}$ **e** $\mathbf{KA^2 = DA^2 - KD^2}$ Poiché i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto ad una medesima circonferenza sono uguali, abbiamo: **CD = CS + DT = (CB – SB) + (DA – TA) =** **= (CB – HB) + (DA – KA)**
	La proprietà detta è di carattere generale ed in particolare: se il trapezio è **rettangolo** il quadrilatero OBCM è un quadrato.
	Se infine il trapezio è **isoscele** i quattro triangoli CHB,OSB, DKA,OTA sono uguali e fra le misure B, b,r della base maggiore, della base minore e del raggio sussiste la relazione dovuta al teor. di Pitagora : $\mathbf{(B/2)^2 = r^2 + [(B-b)/2]^2}$ cioè $\mathbf{4 r^2 + b^2 = 2Bb}$

TRAPEZI CIRCOSCRITTI A CIRCONFERENZE
(relazioni notevoli)

Figura	Sia ABCD il trapezio circoscritto ad una circonferenza di centro O. Indichiamo con H e K i punti di contatto della circonferenza con la base maggiore e con la base minore. Osserviamo, intanto, che il triangolo COB è retto in O. Infatti, dall'uguaglianza dei triangoli KOC, SOC e dei triangoli HOB,SOB risulta KOC = SOC = α HOB = SOB = β e poiché KOH = 180°, si ha: **2 α + 2 β = 180°** **α + β = COB = 90°** In modo del tutto analogo si dimostra che anche il triangolo DOA è retto in O. Si osserva inoltre, che i raggi OS, OT sono le altezze relative alle ipotenuse BC, DA di detti triangoli. Inoltre ricordando che i segmenti di tangente condotti da uno stesso punto ad una medesima circonferenza sono uguali abbiamo: **AB – CD = (AH + HB) – (CK + KD) =** **= (AT + BS) – (SC + DT)**
	
	La proprietà detta è di carattere generale, e si può affermare che in ogni trapezio circoscritto ad una circonferenza: 1) il triangolo, ottenuto congiungendo gli estremi di uno dei lati obliqui col centro del cerchio è retto 2) il raggio del cerchio è medio proporzionale fra due segmenti nei quali il punto di tangenza divide un lato obliquo. Se, in particolare, il trapezio è isoscele indicate con B, b, r le misure della base maggiore, della base minore e del raggio si ha : $\mathbf{r^2 = (B/2)\,(b/2)}$ da cui $\mathbf{r = \sqrt{B/2\ b/2}}$ ovvero $\mathbf{(2r)^2 = Bb}$ da cui si deduce che il diametro della circonferenza (cioè l'altezza del trapezio) è la media geometrica delle due basi.

APPLICAZIONI DELLA SIMILITUDINE
Teorema delle bisettrici

<table>
<tr><td colspan="3">Enunciato
La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto all'angolo in parti proporzionali agli altri due lati e viceversa.
La bisettrice di un angolo esterno di un triangolo interseca il prolungamento del lato opposto in un punto le cui distanze dagli estremi di questo lato sono proporzionali agli altri due lati.</td></tr>
<tr><td>Figura

</td><td>Nomenclatura specifica

AB = c
CA = b
BP = m
PC = n
QC =prolungamento lato BC che incontra in Q la bisettrice esterna
AP bisettrice angolo interno A
AQ bisettrice angolo esterno A</td><td>Formule

Teoremi delle bisettrici

I° Teorema

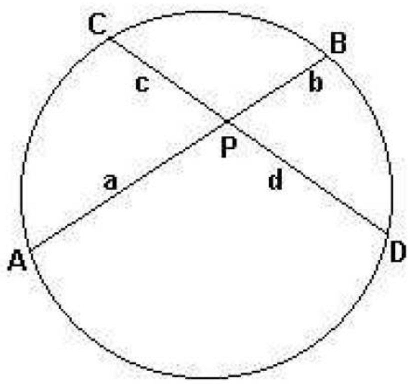
c : b = m : n ed anche

c : b = QB : QC

II° Teorema

$(AP)^2 + mn = b\,c$</td></tr>
</table>

Teorema delle corde

<table>
<tr><td colspan="3">Enunciato
In una circonferenza, il punto comune di due corde secanti divide ciascuna delle corde in due parti che sono rispettivamente i medi e gli estremi di una proporzione, cioè divide le corde in segmenti inversamente proporzionali.</td></tr>
<tr><td>Figura

</td><td>Nomenclatura specifica

AB e CD corde passanti per P

AP = a
PB = b
CP = c
PD = d</td><td>Formule

Teorema delle corde

a : c = d : b

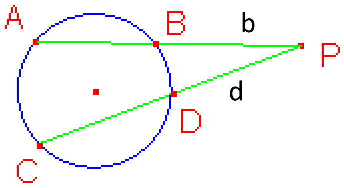
cioè

ab = cd</td></tr>
</table>

Teorema delle due secanti

Enunciato

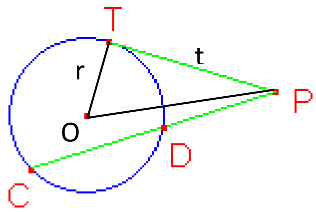
Le secanti, condotte da un punto esterno alla circonferenza, sono inversamente proporzionali alle loro parti esterne.

Figura	Nomenclatura specifica	**Formule**
PA : PC = PD : PB  	AB e CD sono due corde i cui prolungamenti passano per P AP = a BP = b CP = c DP = d	**Teorema delle due secanti** **a : c = d : b** cioè **ab = cd**

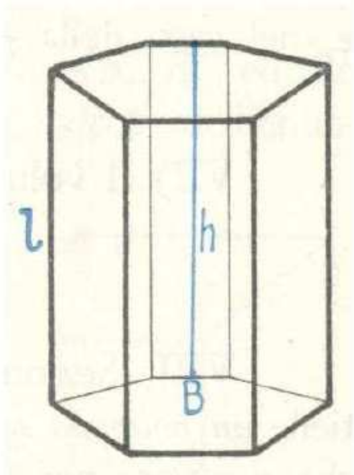
Teorema della secante e della tangente

Enunciato

Condotte da un punto P esterno ad una circonferenza una tangente ed una secante, il segmento di tangente è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna.

Figura	Nomenclatura specifica	**Formule**
 	PD = b parte esterna secante PC = a secante PT = t tangente OT = r OP = e	Teorema della secante e della tangente **a : t = t : b** cioè **ab = t^2 = e^2 – r^2**

PRISMA RETTO

<table>
<tr><td colspan="3">Il prisma è un poliedro limitato da due poligoni uguali e paralleli (basi) e da tanti parallelogrammi (facce laterali) quanti sono i lati del poligono di base.
Un prisma si dice retto se tutte le facce laterali sono perpendicolari alle basi e l’altezza h coincide con uno degli spigoli l. Un prisma si dice regolare se è retto e le basi sono poligoni regolari (le facce laterali sono rettangoli uguali fra loro).</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>2p = perimetro di base
S_b = superficie di base
S_l = superficie laterale
S_t = superficie totale
V= volume</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>S_b = dipende dalla figura di base

$S_l = 2ph$

$S_t = S_l + 2\ S_b$

$V = S_b\ h$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$h = S_l\ /\ 2p$

$2p = S_l\ /h$

$S_b = V\ /\ h$

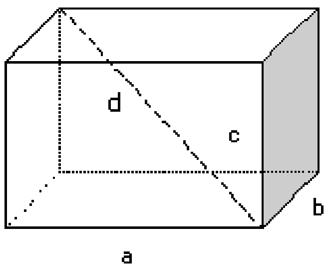
$h = V\ /\ S_b$</td></tr>
</table>

PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO

Un **parallelepipedo** è un prisma le cui basi sono dei parallelogrammi.
Un parallelepipedo può essere:

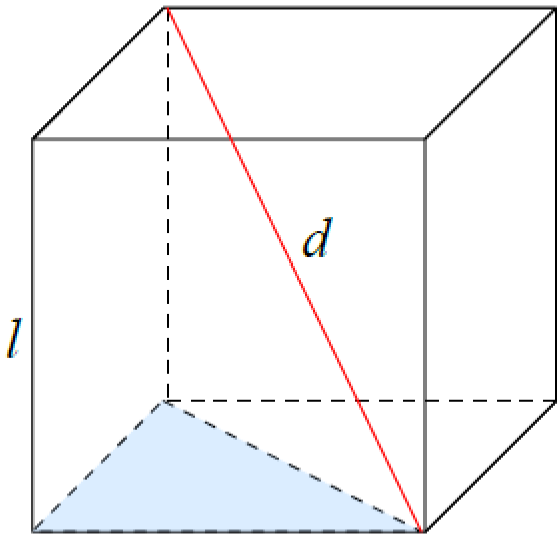
retto: se tutte le sue facce sono perpendicolari alle basi (le facce sono dei rettangoli e le basi dei parallelogrammi).

rettangolo: se è retto e le sue basi sono dei rettangoli (tutte e sei le facce sono rettangoli uguali e paralleli a due a due)

Figura	Nomenclatura specifica	a, b = dimensioni di base c = altezza d = diagonale del parallelepipedo
	**Formule dirette**	$\mathbf{S_b = a\ b}$ $\mathbf{S_l = 2(a + b)\ c}$ $\mathbf{S_t = 2\ (ab + bc + ac)}$ $\mathbf{V = a\ b\ c}$ $\mathbf{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
	Formule inverse	$\mathbf{c = Sl / 2\ (a + b)}$ $\mathbf{2\ (a + b) = Sl / c}$ $\mathbf{a\ b = V / c}$ $\mathbf{c = V / a\ b}$

CUBO

<table>
<tr><td colspan="3">Il cubo è un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni uguali tra loro.

Il cubo è un poliedro regolare limitato da sei facce quadrate (esaedro).</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>l = spigolo del cubo
d = diagonale del cubo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>$S_b = l^2$

$S_l = 4\,l^2$

$S_t = 6\,l^2$

$V = l^3$

$d = l\sqrt{3} = 1{,}7320\,l$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$l = \sqrt{S_b}$

$l = \sqrt{S_l / 4}$

$l = \sqrt{S_t / 6}$

$l = \sqrt[3]{V}$</td></tr>
</table>

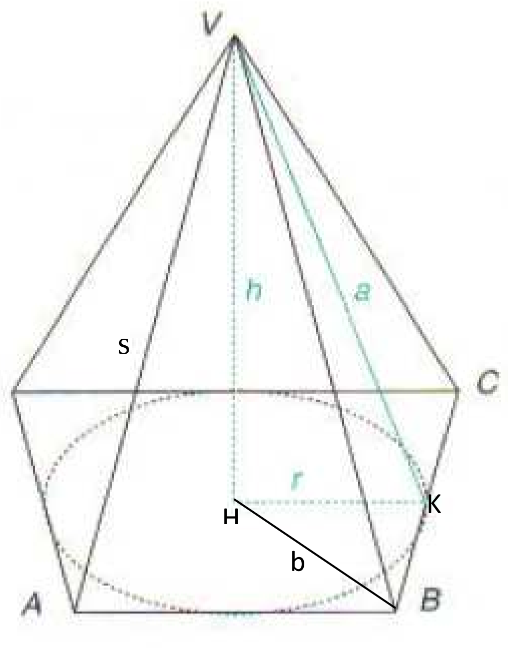
PIRAMIDE RETTA

La **piramide** è un poliedro limitato da un poligono qualsiasi e da tanti triangoli quanti sono i lati di questo poligono, aventi tutti un vertice in comune.

Una **piramide** si dice **retta** se il poligono di base è circoscrittibile a una circonferenza e il piede dell'altezza coincide con il centro di questa circonferenza.

L'**apotema di una piramide retta** è l'altezza di una delle sue facce.

Una **piramide** si dice **regolare** se è retta ed il poligono di base è un poligono regolare.

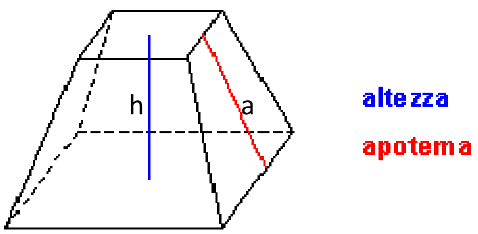
Figura	Nomenclatura specifica	*VA* = *s* = misura dello spigolo laterale *VH* = *h* = misura dell'altezza VK = a = apotema *BC* = *l* = misura del lato della base, *HK* = *r* = misura dell'apotema di base *HB* = b = misura del raggio della base p = semiperimetro di base
	**Formule dirette**	$\mathbf{S_b =}$ dipende dalla figura di base $\mathbf{S_l = p\ a}$ $\mathbf{St = S_l + S_b}$ $\mathbf{V = (S_b\ h) / 3}$
	Formule inverse	$\mathbf{p = S_l / a}$ $\mathbf{a = S_l / p}$ $\mathbf{S_b = 3V / h}$ $\mathbf{h = 3V / S_b}$
Sezionando una piramide con un piano parallelo alla base, si ottiene *un poligono sezione che è simile alla base.* Inoltre la piramide data e quella che si ottiene per sezione sono tali che *gli elementi lineari omologhi sono proporzionali.Le due facce omologhe stanno come i quadrati costruiti su due spigoli corrispondenti.*	**Relazioni notevoli** Dai triangoli rettangoli:	$\mathbf{s^2 = h^2 + r^2}$ (da VHB) $\mathbf{a^2 = h^2 + r^2}$ (da VHK) $\boldsymbol{b^2 = (l/2)^2 + r^2}$ (da BKH per pir. Reg.) $\boldsymbol{s^2 = (l/2)^2 + a^2}$ (da VKB per pir. Reg.)

TRONCO DI PIRAMIDE RETTA

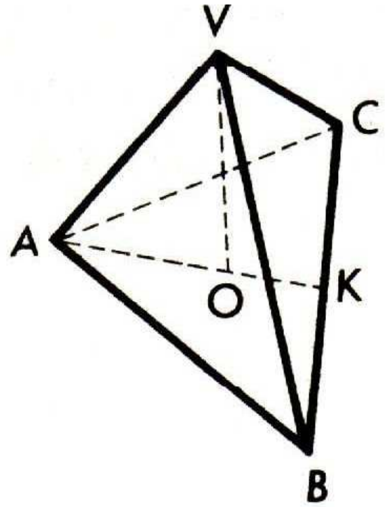
Tagliando una piramide con un piano parallelo alla base si ottengono due solidi: uno è ancora una piramide , l'altro è un **tronco di piramide**. I due poligoni che lo delimitano costituiscono le **basi** del tronco di piramide, e le **facce laterali** sono dei trapezi. La distanza tra le basi è l'**altezza** del solido.

Un **tronco di piramide** si dice **retto** se è stato ottenuto da una piramide retta.

Un **tronco di piramide** si dice **regolare** se è stato ottenuto da una piramide regolare. Le facce laterali di un tronco di piramide regolare sono tutti trapezi isosceli congruenti. L'altezza di uno qualsiasi di questi trapezi è l'**apotema** del tronco di piramide.

Figura	Nomenclatura specifica	h = misura dell'altezza del tronco a = apotema del tronco 2p' = perimetro della base minore 2p = perimetro della base maggiore S_b = area base minore S_B = area base maggiore
	**Formule dirette**	**S_b =** dipende dalla figura di base $\mathbf{S_l = (p + p') a}$ $\mathbf{S_t = S_l + S_b + S_B}$ $\mathbf{V = h (S_b + S_B + \sqrt{S_b S_B}\,) / 3}$
	Formule inverse	$\mathbf{p + p' = S_l / a}$ $\mathbf{a = S_l / (p + p')}$
Si ricordi che le basi S_b, S_B sono due *poligoni simili,* e che stanno fra loro, oltre che come i quadrati di due lati omologhi, anche come i quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide cui appartiene il tronco.	**Relazioni notevoli**	

TETRAEDRO REGOLARE

<table>
<tr><td colspan="3">Il tetraedro è un poliedro con quattro facce triangolari. Il tetraedro si dice regolare quando le sue facce sono triangoli equilateri.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia)
A_{tot} = area totale
l = spigolo (VC=BC=AV ecc)
h = altezza (VO)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule dirette</td><td>$\mathbf{A_{tri} = l^2 \sqrt{3} / 4}$

$\mathbf{A_{tot} = 4 (l^2 \sqrt{3} / 4) = l^2\sqrt{3}}$

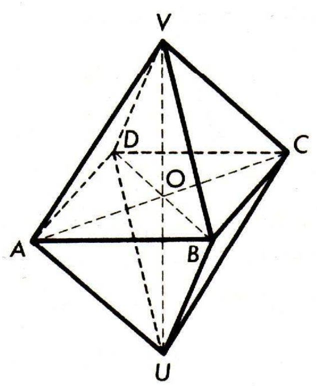
$\mathbf{V = [(l^2 \sqrt{3} / 4)(l \sqrt{6} / 3)] / 3}$

$\mathbf{= l^3 \sqrt{2}/12}$
Per il teorema di Pitagora si ha poi:

$\mathbf{VO = h = \sqrt{[l^2 - (l\sqrt{3} / 3)^2} =}$

$\mathbf{= (l \sqrt{6}) / 3}$</td></tr>
</table>

OTTAEDRO REGOLARE

<table>
<tr><td colspan="3">L'ottaedro è un poliedro con otto facce triangolari. L'ottaedro si dice regolare quando le facce sono triangoli equilateri.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia)
A_{tot} = area totale
l = spigolo(VC=BC=AV= AU ecc)
h = altezza (VO)
AC = diagonale</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Formule dirette</td><td>$\mathbf{A_{tri} = l^2 \sqrt{3} / 4}$

$\mathbf{A_{tot} = 8(l^2 \sqrt{3} /4) = 2 l^2\sqrt{3}}$

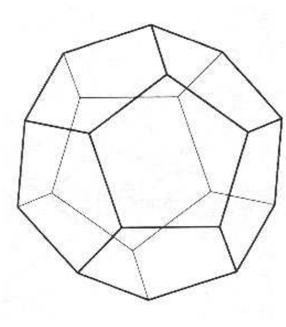
$\mathbf{V = [(2l^2 /3)(l \sqrt{2} / 2)] =}$

$\mathbf{= l^3 \sqrt{2}/3}$
Per il teorema di Pitagora si ha poi:

$\mathbf{AC = l \sqrt{2}}$

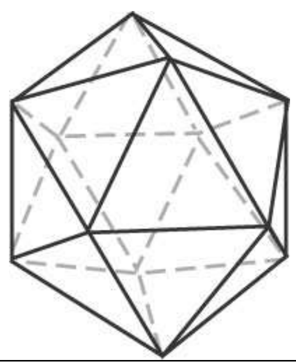
$\mathbf{VO = (l \sqrt{2}) / 2}$</td></tr>
</table>

DODECAEDRO REGOLARE

<table>
<tr><td colspan="3">Il dodecaedro è un poliedro con dodici facce. Un dodecaedro si dice regolare quando le facce sono pentagoni regolari che si incontrano in ogni vertice a gruppi di tre.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>A_{pent} = area pentagono regolare (una faccia)
A_{tot} = area totale
l = spigolo</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule dirette</td><td>$\boldsymbol{A_{tot} = 3\left(\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right) l^2}$

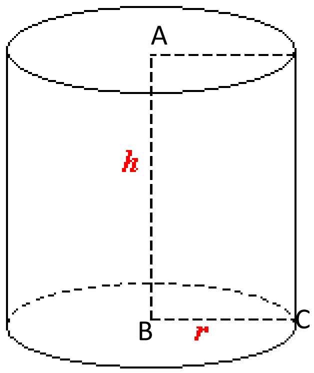
$\mathbf{V = (15 + 7\sqrt{5})\, l^3 / 4}$</td></tr>
</table>

ICOSAEDRO REGOLARE

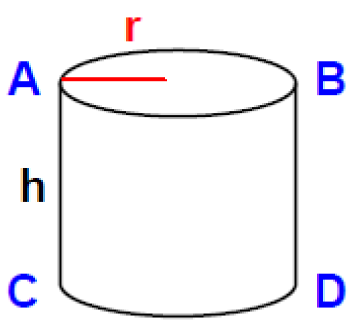
<table>
<tr><td colspan="3">L’icosaèdro è un qualsiasi poliedro con venti facce. L'icosaedro si dice regolare quando le sue facce sono triangoli equilateri.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>A_{tri} = area triangolo equilatero (una faccia)
A_{tot} = area totale
l = spigolo</td></tr>
<tr><td></td><td>Formule dirette</td><td>$\boldsymbol{Atot = 5\, l^2\sqrt{3}}$

$\mathbf{V = (3 + \sqrt{5})\, 5l^3 / 12}$</td></tr>
</table>

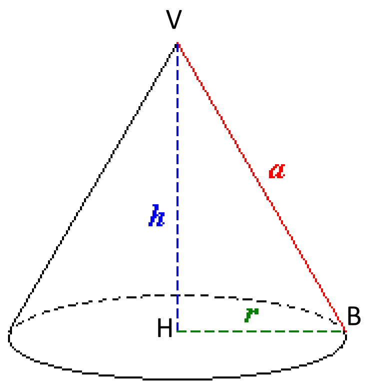
CILINDRO CIRCOLARE

Il **cilindro** è un solido ottenuto dalla rotazione completa di un rettangolo intorno ad un suo lato.		
Figura	Nomenclatura specifica	BC = r = misura raggio di base AB = h = misura dell'altezza del cilindro
 	**Formule dirette**	$S_b = \pi r^2$ $S_l = 2\pi r\, h$ $S_t = 2\pi r\,(h + r)$ $V = \pi\, r^2 h$
	Formule inverse	$h = S_l / 2\pi r$ $r = S_l / 2\pi h$ $h = V / \pi\, r^2$ $r = \sqrt{V / \pi h}$

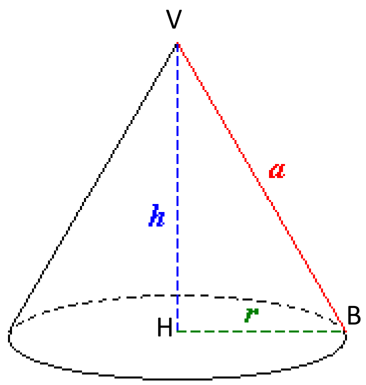
CILINDRO EQUILATERO

Il **cilindro equilatero** è un cilindro in cui l'altezza è lunga quanto il diametro della base.		
Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio di base h = 2r
 	**Formule dirette**	$S_b = \pi\, r^2$ $S_l = 4\pi r^2$ $S_t = 6\pi r^2$ $V = 2\pi\, r^3$
	Formule inverse	$r = \sqrt{S_l / 4\pi}$ $r = \sqrt{S_t / 6\pi}$ $r = \sqrt[3]{(V / 2\pi)}$

CONO CIRCOLARE RETTO

<table>
<tr><td colspan="3">Il cono è un solido ottenuto dalla rotazione di un triangolo rettangolo intorno ad un suo cateto.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>HB = r = raggio di base
VB = a = apotema del cono
VH = h = altezza del cono</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>$\mathbf{S_b = \pi r^2}$
$\mathbf{S_l = \pi r a}$
$\mathbf{S_t = \pi r (a + r)}$
$\mathbf{V = (\pi r^2 h)/3}$
$\boldsymbol{a^2 = h^2 + r^2}$ *(da VHB)*</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$\mathbf{a = S_l / \pi r}$
$\mathbf{r = S_l / \pi a}$
$\mathbf{h = 3V / \pi r^2}$
$\mathbf{r = \sqrt{(3V / \pi h)}}$</td></tr>
</table>

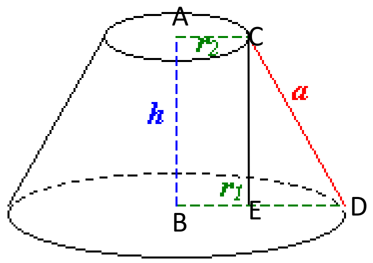
CONO EQUILATERO

<table>
<tr><td colspan="3">Il cono equilatero è un cono in cui l'apotema è lungo quanto il diametro della base.</td></tr>
<tr><td>Figura</td><td>Nomenclatura specifica</td><td>r = raggio di base
a = 2r</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Formule dirette</td><td>$\mathbf{S_b = \pi r^2}$
$\mathbf{S_l = 2\pi r^2}$
$\mathbf{S_t = 3\pi r^2}$
$\mathbf{V = (\pi r^3 \sqrt{3}) / 3}$
$\mathbf{h = r \sqrt{3}}$</td></tr>
<tr><td>Formule inverse</td><td>$\mathbf{r = \sqrt{S_l / 2\pi}}$
$\mathbf{r = \sqrt{S_t / 3\pi}}$
$\mathbf{h = 3V / \pi r^2}$
$\mathbf{r = \sqrt{(3V / \pi h)}}$</td></tr>
</table>

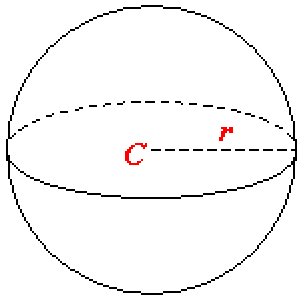
TRONCO DI CONO CIRCOLARE RETTO

Consideriamo un cono e tagliamolo con un piano parallelo al piano della base: otteniamo due figure, una è ancora un cono, l'altra è un **tronco di cono**.

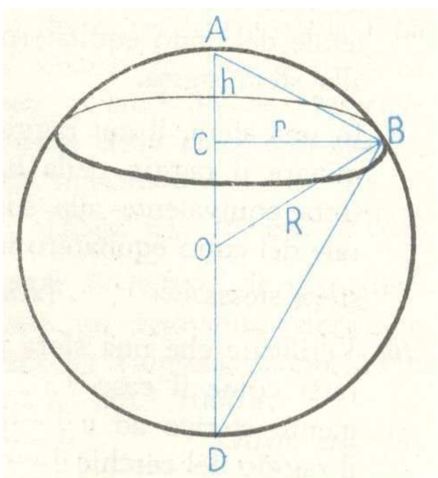
Il **tronco di cono** è un solido attenuto dalla rotazione di un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi.

Figura	Nomenclatura specifica	AB = h = misura altezza del tronco CD = a = misura apotema del tronco BD = r_1 = misura raggio della base magg. AC = r_2 = misura raggio della base min. ED = $r_1 - r_2$
	**Formule dirette**	**Sb =** π $\mathbf{r_2^2}$ S base minore **SB =** π $\mathbf{r_1^2}$ S base maggiore $\mathbf{S_l = \pi a\ (r_1 + r_2)}$ $\mathbf{S_t = \pi a\ (r_1 + r_2) +}$ $\mathbf{+\pi\ (r_1^2 + r_2^2) =}$ $\mathbf{= \pi[a\ (r_1 + r_2) + r_1^2 + r_2^2]}$ $\mathbf{V = \pi\ h\ (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)/\ 3}$ $\mathbf{a^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ (da CED)
	Formule inverse	$\mathbf{a = S_l\ /\ \pi\ (r_1 + r_2)}$ $\mathbf{(r_1 + r_2) = S_l\ /\ \pi a}$

SFERA

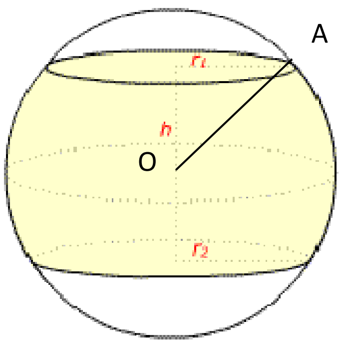
La **sfera** è un solido ottenuto dalla rotazione completa di un semicerchio attorno al proprio diametro, il raggio e il centro del semicerchio sono il raggio e il centro della sfera.		
Figura	Nomenclatura specifica	r = raggio
	**Formule dirette**	**$S = 4\pi r^2$** **$V = 4\pi r^3 / 3$**
	Formule inverse	**$r = \sqrt{S / 4\pi}$** **$r = \sqrt[3]{3V / 4\pi}$**

CALOTTA SFERICA E SEGMENTO SFERICO AD UNA BASE

Si dice **calotta sferica** ciascuna delle parti in cui una sfera è suddivisa da un piano secante. Il volume compreso tra la calotta e il piano secante è detto **segmento sferico ad una base**. Il cerchio delimitato dalla sfera e dal piano secante è detto *base* della calotta. Il raggio passante per il centro della base è un asse di simmetria per la calotta, e incontra la calotta stessa in un punto detto *vertice*; la parte di raggio compresa tra la base e il vertice è detta *altezza* della calotta.		
Figura	Nomenclatura specifica	OB = R = raggio della sfera AC = h = altezza della calotta CB = r = raggio cerchio base calotta e segmento
	**Formule dirette**	Area calotta **$S = 2\pi R h$** Volume segmento ad una base **$V = \pi h^2 (R - h / 3)$**
	Relazioni notevoli Da triangoli rettangoli	**$r^2 = h (2R - h)$** (da ABD per il 2°teor. Euclide)

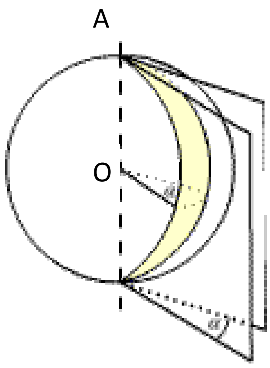
ZONA SFERICA E SEGMENTO SFERICO A DUE BASI

La zona *sferica* è la porzione di sfera racchiusa dalle sezioni della sfera con due piani paralleli. Il volume della zona sferica è detto **segmento sferico a due basi**.

Figura	Nomenclatura specifica	OA = R = raggio della sfera h = misura altezza della zona e segmento r_1 = misura raggio di una base r_2 = misura raggio altra base
	**Formule dirette**	Area zona **$S = 2\pi R\, h$** Volume segmento a due basi **$V = \pi h/6(3r_1^2 + 3r_2^2+h^2)$**

FUSO SFERICO e SPICCHIO SFERICO

Il fuso sferico è la parte di superficie sferica compresa tra due semipiani uscenti dallo stesso diametro. L'*ampiezza del fuso* è l'angolo α compreso tra i due semipiani. Il volume compreso fra i due semipiani è detto **spicchio sferico**.

Figura	Nomenclatura specifica	α = ampiezza angolo del fuso OA = R = misura raggio della sfera
	**Formule dirette**	Area fuso **$S = \pi\, R^2\, \alpha / 90$** Volume spicchio **$V = S\, R/3 = \pi R^3 \alpha / 270$**
	Formule inverse	**$R=\sqrt{90\ A / \pi\alpha}$**
	Relazioni notevoli	Sussistono le proporzioni **1) $4\pi R^2 : A = 360° : \alpha$** **2) $(4\pi R^3)/3 : V = 360° : \alpha$**

Bibliografia

Gentile Valter "Formulario di geometria"