gli speciali di education 2.0

Saggio e attività

Un uso appropriato e coordinato dei Blocchi Aritmetici Multibase e dell'Abaco

di Domenico Lenzi

maggio 2011

1. Introduzione.

L'ingresso nella scuola dell'obbligo determina una rivoluzione fondamentale nel modo di imparare da parte del bambino, poiché l'apprendimento – che per lui sino ad allora è stato spontaneo – si trasforma in parte in apprendimento "imposto", anche se guidato. Di conseguenza, le difficoltà mnemoniche vengono a svolgere, in chiave negativa, un ruolo determinante. E quelle riguardanti l'apprendimento matematico si fanno maggiormente sentire. Infatti, l'immersione in un mondo pieno di insegne luminose e di cartelloni pubblicitari di ogni tipo rende familiari ai bambini i primi approcci con l'alfabeto e con la scrittura delle parole, anche se circa il 6% di loro ha problemi di lettura e di scrittura.

A ciò si deve aggiungere la spinta naturale che essi hanno ad acquisire, attraverso il linguaggio, quello che appare come un mezzo che li avvicina agli adulti, uno strumento essenziale per la promozione e la convivenza civile. Però la stessa cosa non si può dire per la matematica; anche perché una certa cultura attribuisce a questa disciplina un ruolo degno di minor rispetto. Da ciò per gli "addetti ai lavori" deriva il compito di porre particolare attenzione ai primi approcci scolastici con l'aritmetica, onde evitare che qualche difficoltà iniziale possa determinare un atteggiamento di ripulsa e di rigetto nei riguardi di questa materia. Tra le prime difficoltà ricordiamo quella legata alla memorizzazione delle cifre della rappresentazione numerica decimale – per la quale rinviamo a [DML] – che possono indurre notevoli problemi di discalculia.

Ai problemi di tipo mnemonico va dedicata una cura tutta particolare; e in quest'ambito un uso appropriato di materiali didattici può aiutare l'alunno a superarli, offrendogli strumenti, tempi e modi per poterli affrontare con minor affanno.

Comunque, va tenuto presente che i primi insegnamenti di tipo "strutturato" in ambito matematico debbono fare i conti con deficit del tutto naturali, legati a una lenta acquisizione del Principio di Conservazione delle quantità, secondo il quale la quantità di una collezione di oggetti non dipende dalla loro collocazione.

Questi deficit – che, secondo i fondamentali studi di Jean Piaget (cf. [PS]), per la mag-gior parte dei bambini scompaiono intorno ai 6 anni, 6 anni e mezzo – aggiungono difficoltà a difficoltà e rendono problematico l'avvio ai primi elementi di aritmetica; onde l'insegnante dovrà agevolare l'acquisizione del suddetto principio da parte dei suoi allievi. Acquisizione che, come vedremo, potrà essere verificata e in parte favorita dall'uso dei Blocchi Aritmetici Multibase (BAM) in *base due* o *tre*, nonché da altre attività per le quali rimandiamo a [L].

Facciamo presente che, prima dell'introduzione dei BAM, sarà opportuno presentare i primi aspetti della nozione di addizione, intesa come conteggio di palline, caramelle, ecc., collocate in un unico cestino (o in altro contenitore) dopo essere state distribuite – e contate! – in due cestini differenti.

L'accertamento da parte dell'insegnante dell'acquisizione del concetto di addizione nei suddetti termini, assicurerà che lo scolaro ha compreso – o è avviato a comprendere – il Principio di Conservazione delle quantità; il quale assicura che il conteggio complessivo delle palline può avvenire anche lasciandole separate nei due cestini, senza che nulla cambi. Cosicché, conoscendo già il numero di palline contenute in ciascun cestino, per averne il numero totale basterà partire dal numero di palline di uno di questi – che sarà inutile ricontare – e proseguire il conteggio con quelle dell'altro. Per giunta, non importa quale sia il cestino scelto per primo, così si ricava immediatamente la proprietà commutativa dell'addizione.È chiaro che quando si passerà alla *linea dei numeri*, ciò corrisponderà a partire da uno dei due numeri, svolgendo poi sulla *linea* una quantità di "passi" corrispondente al secondo numero; onde la somma sarà data dal numero su cui ci si arresta.

Facciamo presente che nella scuola primaria sarà bene evitare gli esercizi inutili che fanno passare da un numero espresso in una *base* allo stesso espresso in un'altra *base*; questi potranno essere proposti nella scuola secondaria, purché con motivazioni e semplificazioni adeguate. Ovviamente, sarà sempre opportuno transitare dalla *base decimale*, ove questa non sia una delle due *basi* di partenza e di arrivo.

Per quel che riguarda i BAM, intanto sottolineiamo che il loro uso è strettamente legato alla sottrazione ripetuta di un sottraendo costante [la base prescelta!], che porta in modo naturale alla nozione di resto, nel caso specifico rappresentato dai blocchi uguali che non si possono aggregare, poiché sono in numero inferiore alla *base*. Il che prelude alla successiva nozione di divisione con resto.

Tanto per fissare le idee, la *base* sia *tre* e si abbiano 14 cubetti BAM da aggregare in lunghi (da *tre*). Perciò si avranno (si veda fig. 1) 4 lunghi e 2 cubetti residui; onde – a tempo debito – 4 e 2 esprimeranno rispettivamente il quoziente e il resto della divisione di 14 per 3.

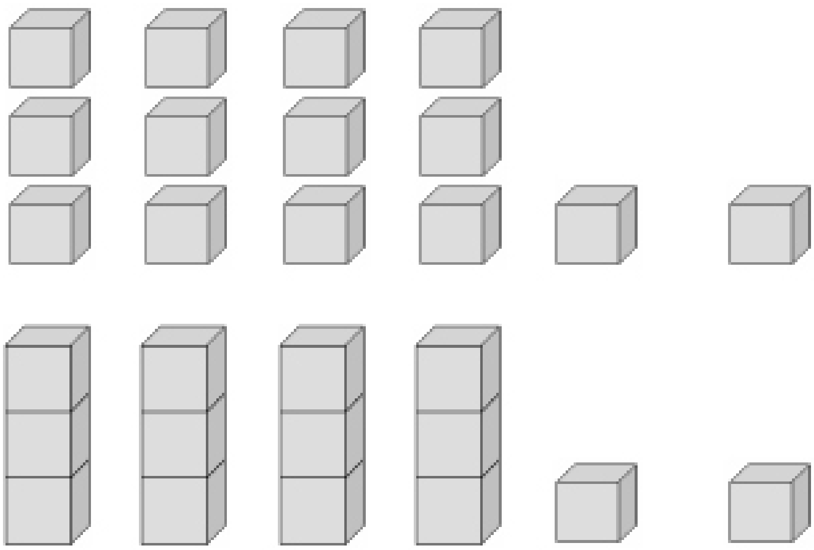


fig. 1

Analogo discorso varrà quando i lunghi saranno aggregati in piatti.

È il caso di notare che i blocchi della *base due*, costituiti da 2, 4, 8 cubetti (e così via moltiplicando per due) o quelli della *base tre*, costituiti da 3, 9, 27 cubetti (e così via moltiplicando per tre) sono l'esito di una procedura molto più semplice di quella relativa all'assemblaggio degli euro in riferimento ai vari tagli monetari. Infatti, con gli euro si procede reiterando la sequenza di fattori 2 / 2,5 / 2:

1 € x 2 = 2 €; 2 € x 2,5 = 5 €; 5 € x 2 = 10 €;

10 € x 2 = 20 €; 20 € x 2,5= 50 €; 50 € x 2 = 100 € …

Ma nessuno trova ciò complicato, in quanto ci si abitua presto.

2. I Blocchi Aritmetici Multibase.

Negli ultimi anni critiche feroci si sono abbattute sui materiali strutturati per l'insegnamento della matematica, giustificate dall'utilizzo improprio che a volte si è fatto di questi (in proposito si rinvia a [DML]). Perciò noi qui vogliamo riservare la nostra attenzione a un uso appropriato dei blocchi aritmetici, al fine di favorire a poco a poco la comprensione da parte degli scolari dei concetti che sono alla base della rappresentazione dei numeri. Concetti che in un secondo momento saranno rinforzati tramite un uso coor-dinato di blocchi aritmetici ed abaco, prima di giungere alla rappresentazione grafica usuale, rispetto alla quale tutta l'attività manipolativa svolta in precedenza potrà costituire un supporto conoscitivo, spesso latente, ma fondamentale e duraturo.

Sarà cura dell'insegnante partire da una *base* piccola. Per facilitare l'attività, in un primo momento sarà opportuno usare la *base due*. In tal modo gli alunni potranno realizzare i pezzi fondamentali mostrati in fig. 2 ed altri ancora.

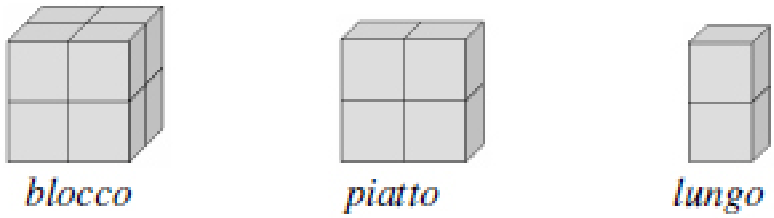


fig. 2

In tale figura i cubetti sono stati assemblati secondo la regola che, operando in una determinata *base m* (nel caso in questione la *base due*), *m* blocchi uguali (due nel caso esaminato) debbono essere "attaccati" per formare il pezzo di livello immediatamente superiore.

I precedenti blocchi sono quelli che normalmente si trovano in commercio. Tuttavia, all'occorrenza, due cubi (tre nella *base tre*, e così via) possono essere assemblati tramite un elastico. In tal modo si ottiene un pezzo che va sotto il nome di *lungo-blocco*.

Ovviamente, con i blocchi di fig. 2 (ciascuno usato non più di una volta) si possono avere quantità di cubetti che vanno da 1 a 15. In particolare, nella successiva fig. 3 (11) si riconoscono di seguito gli assemblaggi di 6, 7 e 13 cubetti, e quindi una prima rappresentazione dei numeri 6, 7 e 13.

È chiaro che l'ultima serie di blocchi di fig. 3 si ottiene mettendo prima insieme le due serie di blocchi precedenti; dopodiché, due dei tre piatti ottenuti (uno dei quali è stato ricavato dai due lunghi) sono stati assemblati a loro volta. In tal modo si è ottenuta la somma 6 + 7 (6 cubetti *più* 7 cubetti).

In questa prima fase l'attività potrà essere condotta da coppie di scolari. Uno dei due all'inizio avrà una scatola con alcuni cubetti da assemblare; che, per semplicità, non dovrebbero essere più di 15. Invece, l'altro alunno svolgerà il ruolo di *cassiere* che via via sostituisce due *pezzi* uguali del compagno con un *pezzo* in cui quelli (o meglio, loro copie) risultano essere *saldati*.

(1) Ove la collocazione dei blocchi prefigura l'attività che si svolgerà con l'abaco.

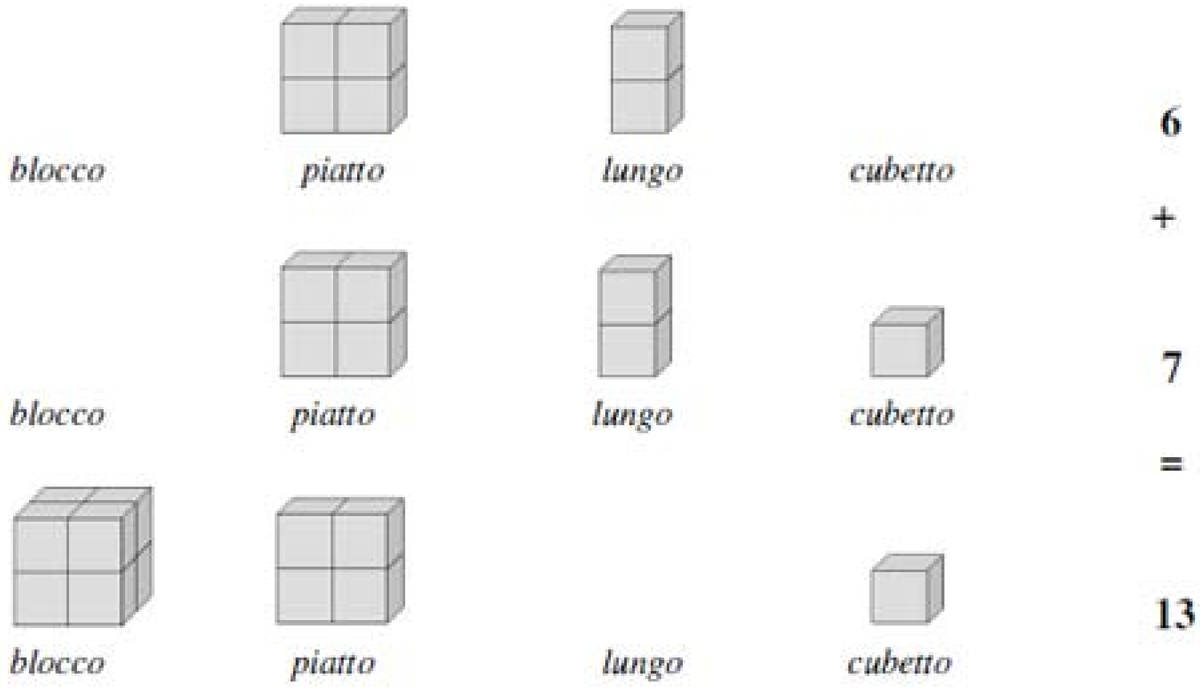


fig. 3

Una volta assemblati i pezzi, l'insegnante verificherà se ci siano dubbi sul fatto che – in termini contabili – non è cambiato nulla. Un'eventuale esitazione potrà essere superata ribadendo che nel corso di ogni scambio non c'è stato né guadagno né perdita di cubetti, dal momento che si è proceduto con "scambi alla pari"; onde si ha una conservazione della quantità dei cubetti iniziali, anche se ora alcuni di essi risultano aggregati.

Ciò sarà confermato dal conteggio dei cubetti riuniti, che darà un numero uguale a quello dei cubetti complessivamente presenti prima dell'inizio dell'attività.

Sottolineiamo che con quest'ultima attività si è anche in grado di verificare il livello di possesso del Principio di Conservazione delle quantità discrete. Ove per qualche alunno questo non sia soddisfacente, sarà opportuno rivedere il percorso effettuato a partire dall'avvio al contare, poiché si potrebbe essere in presenza di difficoltà cognitive.

Una volta compresi i concetti in *base due*, si provvederà al loro rinforzo nelle *base tre* (ed eventualmente *quattro*), onde sarà più semplice trasferirli e farli comprendere in *base decimale*. In fig. 4 abbiamo gli usuali blocchi della *base tre*.

Quanto detto vale in particolar modo per bambini portatori di difficoltà, quali i sordi e i ciechi. Per i primi, nei momenti cruciali dell'attività proposta, la percezione visiva delle numerosità in gioco è pressocché immediata; il che in generale è ben noto per quantità pari a due, tre o di poco superiori. Ciò varrà anche per i ciechi, che sostituiranno alla vista il tatto.

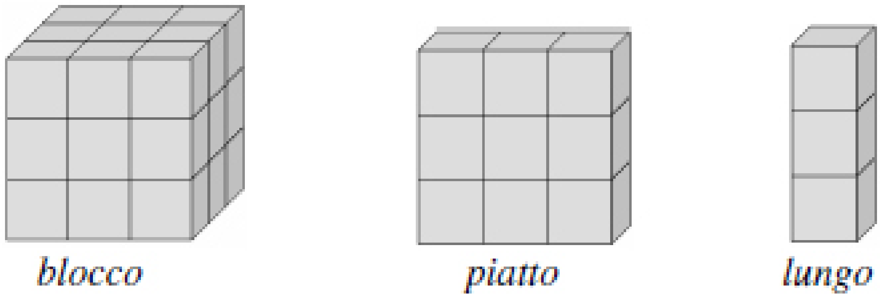


fig. 4

In *base tre*, le verifiche tramite conteggio sarà bene limitarle all'utilizzo dei *piatti*. Diversamente esse diventerebbero laboriose, dato che i numeri in gioco potrebbero risultare troppo grandi per alunni di una prima classe di scuola primaria.

Una volta acquisito l'uso delle *basi due* e *tre*, si potranno già riconoscere in maniera abbastanza agevole proprietà di tipo generale legate alla rappresentazione dei numeri. Ciò perché, come si è detto, quantità fino a tre sono facilmente percepibili; onde l'alunno è sgravato da problemi di conteggio troppo complicati. Il che gli permette di concentrare la sua attenzione sugli aspetti fondamentali della rappresentazione in oggetto.

Osservazione 1. Sottolineiamo come sia importante che gli alunni capiscano che il discorso fatto non riguarda soltanto i blocchetti BAM, ma qualsiasi tipo di oggetti – palline, caramelle, cioccolatini, eccetera – che andranno via via aggregati secondo la *base* prescelta.

In fig. 5 abbiamo un'aggregazione di cioccolatini che richiama quella che si realizza con i BAM della base *tre*.

fig. 5

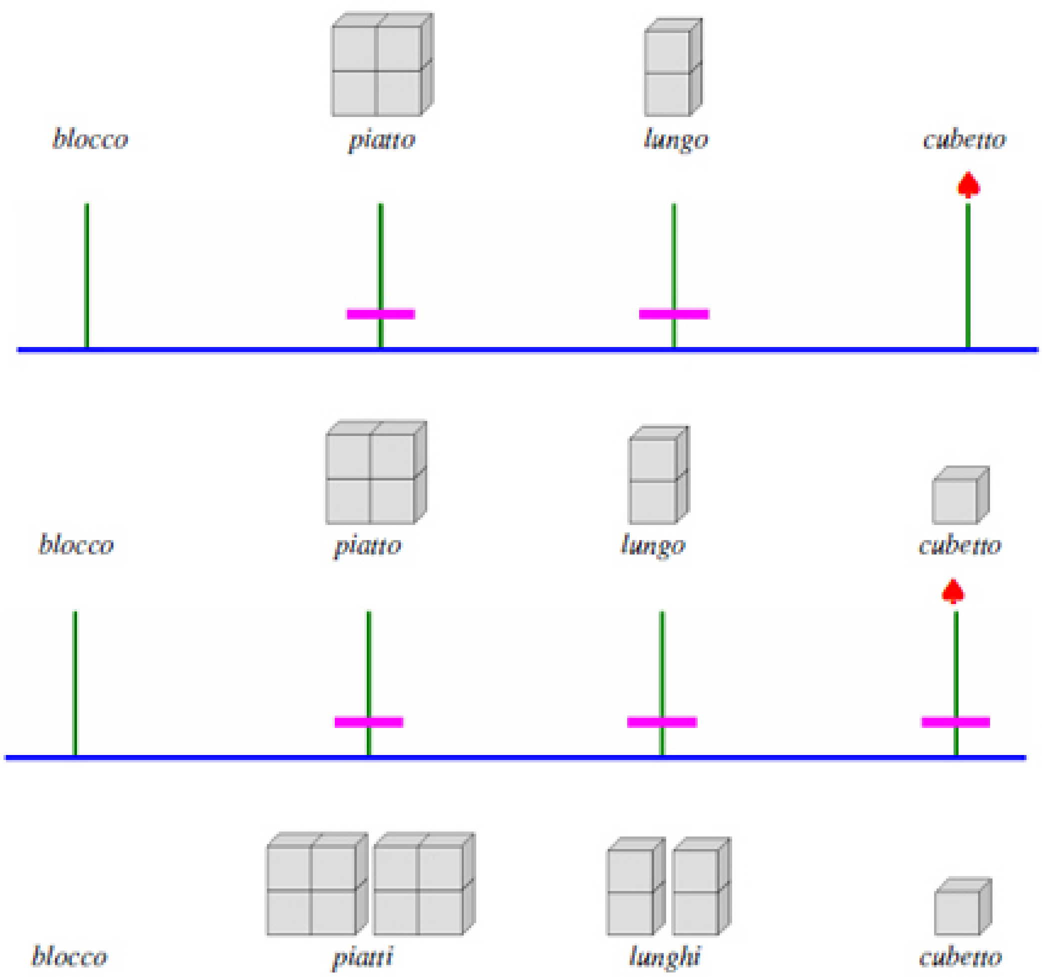
Concludiamo il paragrafo osservando che il livello aggregativo corrispondente alle migliaia, in *base due* e in base *tre* si ottiene usando rispettivamente 8 e 27 cubetti. Perciò in queste basi è facile da realizzare.

3. Uso dell'abaco nella rappresentazione dei numeri naturali.

A questo punto l'abaco – con le sue asticelle verticali che si susseguono da destra verso sinistra – svolge semplicemente il ruolo di strumento di registrazione della situazione finale a cui si è pervenuti attraverso l'uso dei BAM, onde un anello collocato su di un'asticella individua blocchi di un ben determinato tipo. Precisamente, dopo l'attività di aggregazione, sulla prima asticella da destra si collocherà una quantità di anelli corrispondente al numero di cubetti rimasti; sulla seconda asticella una quantità di anelli corrispondente al numero di lunghi rimasti, e così via. Ovviamente, questo numero sarà al massimo 1 in *base due*, al massimo 2 in *base tre* … [al massimo 9 in *base dieci*].

Osservazione 2. È bene che nella scansione *cubetto*, *lungo*, *piatto*, *blocco* … [così come – in base *decimale* – nell'usuale scansione *unità*, *decine*, *centinaia*, *migliaia* …] venga usato l'aggettivo residuo. Ciò affinché l'alunno non trascuri, come talora avviene, di considerare che ogni piatto proviene dall'aggregazione di lunghi; così come ogni *centinaio* proviene dall'aggregazione di dieci *decine*.

Perciò, considerato il numero 3.548 (in base decimale), se si suppone, anche alla luce dell'Osservazione 1, che il processo di aggregazione a dieci a dieci sia riferito alle *decine* – trascurando le *unità* residue – si ha che avendosi 4 *decine* residue, 5 *centinaia* residue e 3 *migliaia* residue, la rappresentazione in *base decimale* delle *decine* [totali] del numero 3.548 è data da 354. Analogamente, per le *centinaia* [totali] si avrà 35.



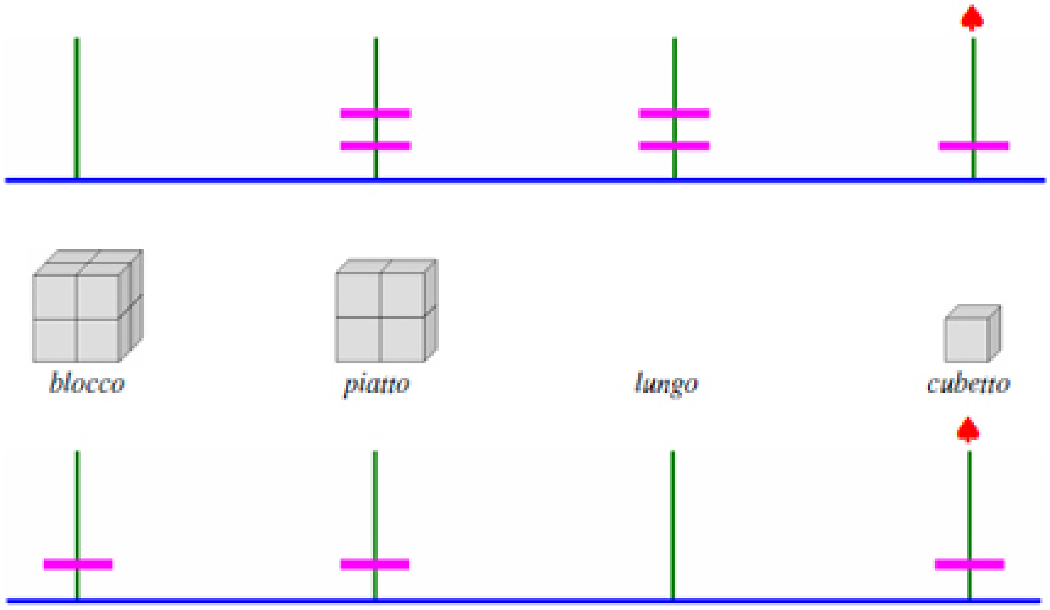


fig. 6

Successivamente l'alunno potrà rendersi conto di come si esegue l'addizione tra due numeri naturali rappresentati su due abaci diversi, facendogli fare concretamente quello che poi sarà tradotto graficamente con l'uso delle classiche cifre, mettendolo in condizione di capire più facilmente la procedura.

In una prima fase sarà opportuno trasportare ciascun anello situato su di un'asticella di un abaco sull'omologa asticella dell' altro abaco. Il che, nella rappresentazione tramite i BAM, è come raggruppare blocchi dello stesso tipo riferiti ai due addendi in gioco. Anzi, l'operazione sarà opportuno eseguirla in *tandem* con i BAM, adoperando le due aggregazioni BAM che esprimono gli addendi. Ciò permetterà all'alunno di assimilare il fatto fondamentale che i vari "passi" svolti sull'abaco per effettuare l'addizione non fanno altro che riprodurre quello che si fa con i BAM.

In fig. 6, al di sotto di ciascuna serie di pezzi considerata in fig. 3, è stato riportato in forma stilizzata un abaco con gli anelli che rappresentano i suddetti pezzi.

Inoltre, prima del risultato finale, è stata inserita anche la fase intermedia della procedura; secondo cui due pezzi uguali vengono aggregati per poi dare un pezzo del livello successivo [nel caso in questione, due lunghi]. Onde i due anelli che corrispondono a es-si su ciascun abaco vengono sostituiti – sull'abaco che riporta il risultato – con un anello collocato sull'asticella del livello successivo. Così sull'abaco del risultato si giunge a esprimere l'unico aggregato in BAM che corrisponde ai due aggregati e ai due abaci di partenza. Tutto ciò senza l'assillo di dover memorizzare una "tabellina" dell'addizione.

Si noti che il *cappuccetto rosso*, che negli abaci di fig. 6 è stato messo sulla prima asticella di destra, può svolgere un ruolo essenziale in presenza di un leggero difetto di lateralizzazione. Infatti, grazie a esso, la rappresentazione di un numero sull'abaco si può effettuare senza focalizzare necessariamente la procedura sull'*andamento da destra verso sinistra*, bensì sul *progressivo allontanamento dal cappuccetto*.

In definitiva, l'abaco può essere collocato anche come in fig. 7 o in una qualsiasi altra posizione.

Quel che conta è che l'asticciola col cappuccetto serve per registrare i cubetti residui (***asticella unitaria***), quella successiva per registrare i lunghi residui, e così via.

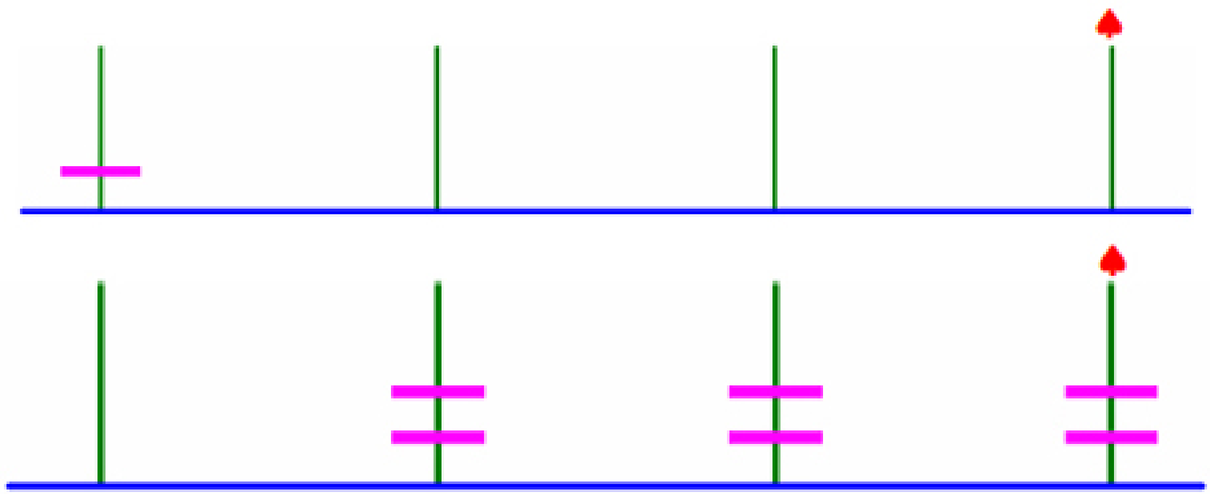


fig. 7

Dopo che sarà stata introdotta la moltiplicazione, l'alunno sarà in grado di capire che sull'abaco moltiplicare per il numero che esprime la base corrisponde a slittare verso sinistra di un posto i vari anelli. Il che in seguito sarà come aggiungere uno zero alla rappresentazione grafica del numero considerato inizialmente.

Però, a parte quanto precisato ora, siamo dell'avviso che – al di là dell'illustrazione operativa dell'addizione ed eventualmente della sottrazione – nella presentazione della procedura della moltiplicazione l'uso dei BAM e dell'abaco possa risultare inutile e farraginoso. Perciò è opportuno che quest'ultima operazione venga illustrata facendo riferimento ai suddetti materiali soltanto come ausilio per la rappresentazione e la memorizzazione concreta delle cifre decimali del moltiplicando.

Concludiamo il paragrafo sottolineando che una volta che siano stati neutralizzati i problemi di lateralizzazione, si potrà avviare l'alunno alla scrittura dei numeri, cercando di fargli capire che si vuole adottare un modo più semplice di rappresentare le quantità. Perciò ci si serve di opportuni segni grafici, detti "cifre", ognuno dei quali ci ricorda una quantità di anellini posti su di un'asticella dell'abaco. Inoltre, ogni cifra è posizionata in modo da richiamare la collocazione sull'abaco degli anellini corrispondenti.

Per facilitare il passaggio al segno grafico, si useranno ancora le *basi due* e *tre*. Ma – oltre al segno "0", che indica mancanza di anellini sull'asticella identificata dalla sua posizione – per l'1 e per il 2 si useranno rispettivamente i segni (una sbarretta) e (due sbarrette) ([22]).

4. L'abaco e il confronto tra numeri naturali.

Ricordiamo che un numero naturale ([33]) è minore di un altro quando esso rappresenta una quantità di oggetti inferiore rispetto al secondo; onde, *per pareggiare i conti*, alla prima quantità di oggetti bisogna aggiungerne degli altri. Ciò corrisponde al fatto che, nella *cantilena dei numeri*, il primo numero precede l'altro.

Nella rappresentazione decimale il confronto avviene considerando i due seguenti criteri, che possono essere usati in qualsiasi base:

([2]) Per quel che riguarda le cifre decimali si rinvia ancora a [DML].

([3]) In seguito ometteremo l'aggettivo "naturale".

Criterio 1). Di due numeri che abbiano diversa quantità di cifre (in breve, hanno diversa *lunghezza*) il più grande è quello che ha lunghezza maggiore; cioè, presenta un numero di cifre maggiore rispetto all'altro (quindi, in notazione decimale, 27.481 è più gran-de di 9.314).

Criterio 2). Invece, se due numeri hanno la stessa quantità di cifre, bisogna confrontare quelle, partendo dalla prima di sinistra. Allora il più grande dei due numeri è quello in cui si incontra per la prima volta una cifra maggiore rispetto alla cifra omologa dell'altro (quindi, in notazione decimale, 35.726 è più grande di 35.699).

Per renderci conto più agevolmente dei suddetti criteri, supporremo che i numeri da confrontare siano rappresentati su di un abaco.

Ora che nella rappresentazione di un numero può capitare di ritrovarsi con qualche *zero* a sinistra, ci si rende conto facilmente che il Criterio 1 è riconducibile all'altro, purché il numero di cifre di due numeri da confrontare venga pareggiato, premettendo alcuni *zeri* al numero meno lungo.

Noi ci serviremo anche della seguente semplice proprietà:

(a) Se ciascuna cifra di un numero è maggiore (o almeno uguale) alla cifra omologa di un altro, allora esso è maggiore (o almeno uguale) rispetto all'altro.

In particolare, se almeno due cifre omologhe sono differenti, allora il primo numero è maggiore del secondo.

È chiaro che a noi interessa il caso in cui le cifre omologhe dei due numeri non sono tutte uguali, altrimenti le due rappresentazioni coinciderebbero.

Ebbene, poiché ciascuna cifra di un numero si traduce sull'abaco nella corrispondente quantità di anellini collocati su di un'opportuna asticella, allora, con riferimento ai due numeri citati nella (a), per ottenere dal secondo numero il primo, bisogna aggiungere degli anellini all'abaco che rappresenta il secondo numero; il che significa aggiungere dei blocchetti BAM ai suoi. Perciò il secondo numero individua una minore quantità di blocchetti, onde esso è minore dell'altro.

Allora, da fig. 8 e fig. 9 si vede subito che, qualunque sia la *base* prescelta ([4]), il numero rappresentato in fig. 8 è minore di quello rappresentato in fig. 9, dato che al primo mancano rispetto al secondo i cubetti di un lungo [in *base dieci*: una decina] e quelli di un piatto [in *base dieci*: un centinaio].

fig. 8

([4]) Nel caso in questione, maggiore o uguale a *tre*, dato che si usano anche due anellini.

fig. 9

Nota Bene. Gli alunni accettano facilmente i suddetti criteri che sono verosimili e facili da ricordare. Ma la loro giustificazione risiede esclusivamente nel tipo di rappresentazione numerica prescelta.

Al contrario, supponiamo di rappresentare i numeri usando i vari tagli monetari dell'euro, onde la moneta da un euro rappresenta il numero **uno**, quella da due euro rappresenta il numero **due**, quella da cinque euro il numero **cinque** e quella da dieci euro il numero **dieci**, eccetera.

Inoltre serviamoci dell'abaco come strumento di registrazione, usando la prima asticella di destra per la moneta da un euro, la seconda per la moneta da due euro, la terza per quella da cinque euro e la quarta per quella da dieci euro, eccetera.

È chiaro che nella prima asticella di destra abbiamo bisogno al più di un anellino, dato che per rappresentare il **due** ci serviamo della moneta da due euro, che viene espressa mediante un anellino situato sulla seconda asticella.

Ma ora per rappresentare il numero **quattro** abbiamo bisogno di poter mettere sulla seconda asticella due anelli, corrispondenti a due monete da due euro. Invece, per ovvie ragioni, sulla terza e sulla quarta asticella collocheremo al più un anello, per rappresentare rispettivamente cinque euro (e il numero **cinque**), nonché dieci euro (e il numero **dieci**).

Ora, se osserviamo i due abaci di fig. 10, ci rendiamo conto che nella rappresentazione in una qualsiasi base essi rappresentano numeri diversi.

Ad esempio in base decimale essi rappresentano rispettivamente 100 e 21.

Invece con la rappresentazione riferita all'euro – che richiede (e quindi dovrebbe consentire in ogni situazione) l'uso di due anellini nella seconda asticella, dovendo essi rappresentare il **quattro** (quattro euro) – i due abaci rappresentano entrambi il **cinque** (cinque euro).

Il che ci fa vedere che il Criterio 1 non ha validità generale, anche se esso vale nell'usuale rappresentazione numerica in una data base. Inoltre, non vale nemmeno la successiva proprietà (b) .

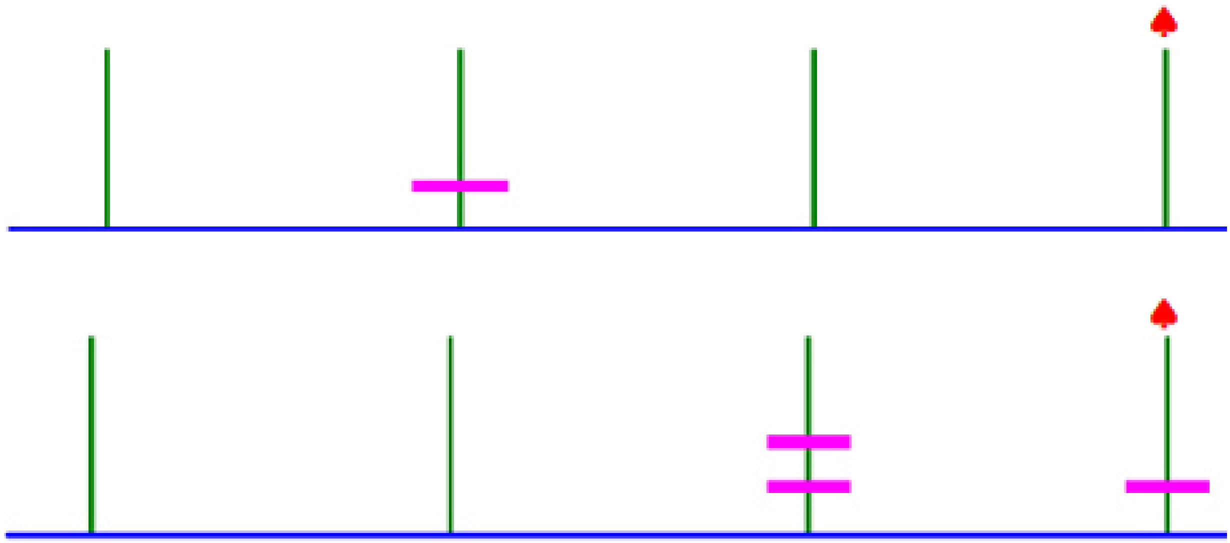


fig. 10

Infatti, lasciando gli euro e tornando alla rappresentazione in una data base, veniamo a una proprietà fondamentale per la verifica dei Criteri di cui stiamo parlando:

(b) Se un abaco contiene un solo anellino, collocato su di un'asticella distinta da quella dei cubetti, allora la quantità di cubetti da esso rappresentata supera la quantità che si rappresenta eliminando quell'unico anellino e riempendo al massimo consentito dalla *base* in uso ([55]) le asticelle situate alla destra di quella svuotata (si veda fig. 11, che è riferita alla *base tre*).

Ciò vale a maggior ragione se queste ultime asticelle si riempiono solo in parte. Invero, se aggiungiamo un cubetto alla quantità rappresentata dal secondo abaco della seguente fig. 11 [nella quale usiamo la *base tre*; ma il discorso si può fare in ogni situa zione analoga e con ogni *base*], ciò è come aggiungere un altro anellino nella prima asticella di destra, che verrà ad avere tre anellini.

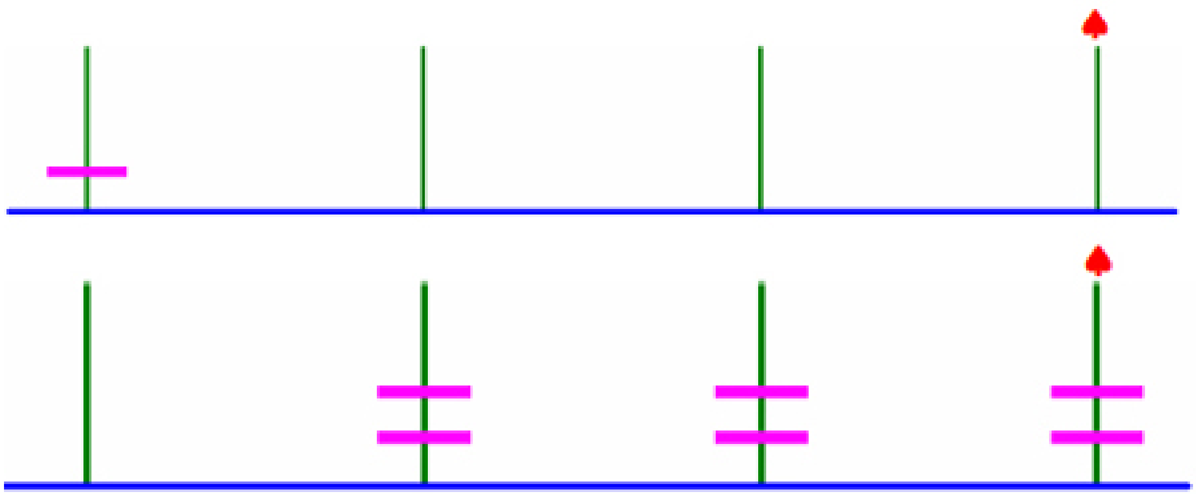


fig. 11

([5]) Come è ormai ovvio, questo massimo è 1 in base due. 2 in base tre......9 in base dieci.

Allora questi ultimi si trasformano in un anellino che va a collocarsi nell'asticella dei lunghi. Perciò questi ultimi, che sono diventati tre, si trasformano in un anellino che va a collocarsi nell'asticella dei piatti. Onde gli anellini dei piatti diventano tre, e ci danno un solo anellino che si colloca nell'asticella successiva; ottenendo così la rappresentazione relativa al primo abaco di fig. 11.

Volendo fare un analogo ragionamento in *base dieci*, sul secondo abaco di fig.11 si metteranno nove anellini laddove ora ce ne sono due. Il che assicura che 999 è più piccolo di 1.000, poiché 1.000 si ottiene aggiungendo 1 a 999.

Quanto detto ci consente di giustificare agevolmente i criteri 1) e 2).

Criterio 1). Il primo anellino di sinistra del numero di lunghezza maggiore, esprime una quantità che – grazie alla proprietà (b) – supera da sola la quantità espressa dal secondo numero. Di conseguenza, eventuali altri anellini di pertinenza del numero più lungo contribuiscono ad accentuare la prevalenza di quest'ultimo sull'altro.

Criterio 2). Consideriamo il numero in cui si incontra per la prima volta un'asticella ***i*** con una quantità di anellini maggiore rispetto all'omologa asticella ***i*** dell'altro numero. Se l'asticella i è la prima da destra [cioè, quella dei cubetti residui], la situazione è ovvia, in quanto riconducibile alla proprietà (a). Perciò supponiamo che l'asticella ***i*** sia un'altra.

Allora un anellino situato in ***i*** nel primo abaco – anellino che conveniamo di eliminare – esprime una quantità che, grazie alla proprietà (b), supera da sola la quantità espressa nel secondo abaco dagli anellini situati alla destra dell'asticella ***i***; e conveniamo di eliminare anche questi.

È chiaro che, dopo l'eliminazione effettuata, su ciascuna asticella del primo abaco è rimasta una quantità di anellini che è maggiore (o almeno uguale) alla quantità di anellini rimasta sull'asticella omologa del secondo abaco. Perciò ora – dato che siamo pervenuti a una situazione riconducibile alla proprietà (a) – il primo abaco individua una quantità che è maggiore (o almeno uguale) a quella individuata dal secondo abaco.

Per quanto è stato detto, inizialmente sui due abaci erano rispettivamente descritte delle quantità che poi abbiamo scisso in quantità minori. Ma la scissione relativa al primo abaco ha dato luogo a due quantità che complessivamente prevalgono sul complesso delle due quantità espresse dal secondo abaco. Onde il Criterio 2) è giustificato.

5. Abaco e numeri decimali.

Dedichiamo questo paragrafo alla rappresentazione, mediante l'abaco, di quantità di tipo frazionario-decimale.

Inizialmente facciamo riferimento, per semplicità, alle classiche torte, partendo dal presupposto che gli alunni conoscano già i primi aspetti della nozione concreta di frazione. Infatti è priva di giustificazione – anzi, deleteria – un'introduzione dei numeri decimali basata su una mera estensione formale dell'attività che si svolge con i numeri naturali e con la loro rappresentazione, senza che ci sia piena coscienza del significato delle unità frazionarie decimali.

Inoltre l'alunno ormai dovrà aver chiara la nozione di divisione senza resto, che si può svolgere solo in casi particolari: quelli in cui il dividendo è un multiplo del divisore; il che fa della divisione l'*operazione inversa* della moltiplicazione.

Di conseguenza, siccome quando un anellino sull'abaco si sposta di un passo verso sinistra il suo valore risulta moltiplicato per dieci, allora quando esso si sposta di un passo verso destra il suo valore risulta diviso per dieci; cioè, quel valore corrisponde alla decima parte del valore che aveva precedentemente.

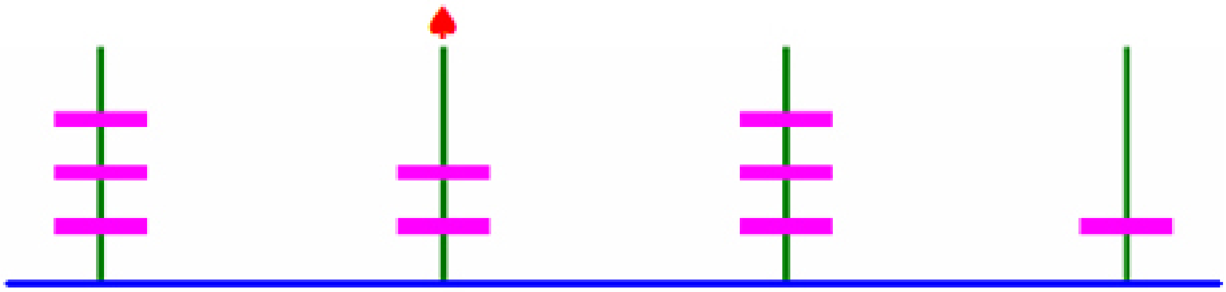


fig. 12

Poiché un anellino situato sull'asticella unitaria (cioè, quella col *cappuccetto*) continua a rappresentare *unità* residue, questa convenzione si estende al caso in cui ci siano asticelle anche alla destra di quella delle unità. Perciò, se sull'abaco di fig. 12 è rappresentata una certa quantità di torte, allora sull'asticella situata alla destra di quella unitaria si rappresentano *decimi* di torta, che convenzionalmente saranno al massimo nove, dato che dieci decimi della nostra torta danno una torta intera.

Allo stesso modo, sull'asticella situata immediatamente alla destra dell'asticella dei decimi, gli anellini rappresentano un decimo della decima parte di una unità. Il che, in termini di torta, significa che – dopo che questa è stata suddivisa in dieci parti uguali – ciascuna di queste parti a sua volta è stata suddivisa in dieci parti uguali, per un totale di cento (10x10) parti. Perciò su quest'altra asticella sono rappresentati i centesimi, che non potranno essere più di dieci, dato che …; e così via.

Allora, la quantità di fig. 12 si rappresenta graficamente così: 32,31. Dove la "virgola" è stata posta alla destra della cifra delle unità.

In termini di torte, 32,31 esprime tre *decine* di torte, più una *unità* di torta [per un totale di 31 torte intere], più due decimi di torta, più un centesimo di torta.

Ora dovrebbe essere chiaro che, se vogliamo esprimere la suddetta quantità in termini di centesimi di torta – una volta che tutte le torte intere sono state suddivise in cento parti – allora riaggregando i centesimi di torta a dieci a dieci [ottenendo così decimi di torta] avremo, come già sappiamo, 1 *centesimo* residuo e tanti *decimi* da aggregare. Quindi i *decimi* residui saranno 3 …; e così via, ottenendo di seguito 2 e 3. Perciò abbiamo una quantità pari a 3.231 centesimi di torta. Se gli alunni hanno capito il discorso, dovrebbero rendersi conto che – con un piccolo aggiustamento – il confronto numerico visto nel paragrafo precedente si estende ai numeri decimali.

Infatti, se vogliamo confrontare 32,31 con 32,5, non possiamo dire semplicisticamente che il primo è maggiore del secondo perché i due coincidono per la parte intera, ma il primo ha una parte decimale pari a 31, mentre il secondo ha una parte decimale pari a 5. In realtà dobbiamo tener conto del fatto che in 32,5 i centesimi vanno tenuti in considerazione, anche se essi sono in quantità *zero*; dato che la cifra 0 può essere trascurata solo all'inizio della parte intera, come nel caso dei numeri naturali. Perciò, se esplicitiamo questo fatto (anche con l'ausilio dell'abaco), il secondo numero va scritto così: 32,50; onde 32,50 è più grande di 32,31.

In definitiva, se si vogliono confrontare due numeri decimali, conviene sempre "pareggiare" le cifre decimali con l'eventuale aggiunta di un numero opportuno di 0. Quindi, per ragioni analoghe a quelle espresse nel paragrafo precedente, si vede agevolmente che se i due numeri dati inizialmente hanno parti intere diverse, allora il più grande dei due è quello che ha parte intera più grande. Invece, se hanno la stessa parte intera, il più grande dei due è quello che ha la parte decimale maggiore; purché – come si diceva – nei due numeri le parti decimali siano state pareggiate in lunghezza.

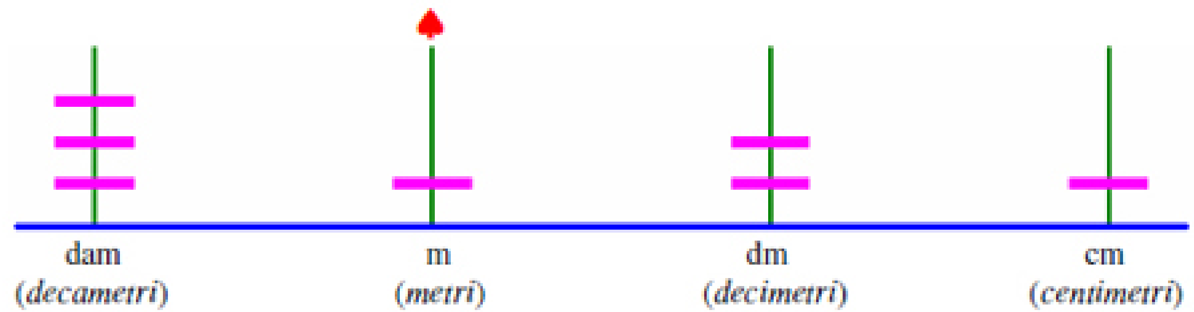
6. L'abaco nel sistema metrico decimale.

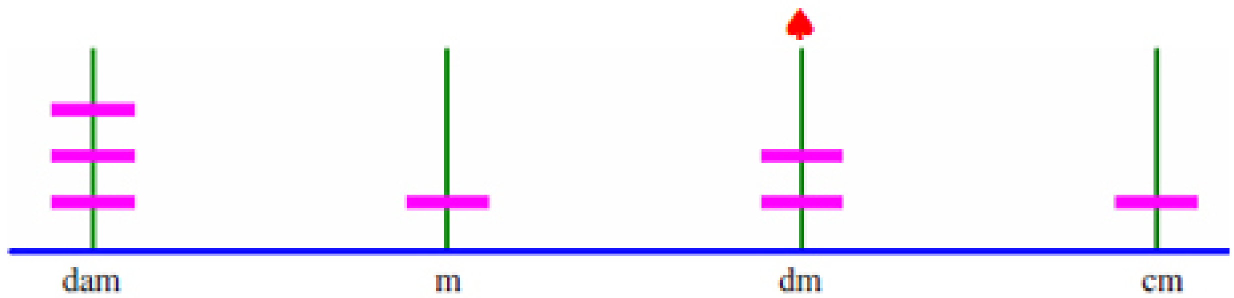
Dedichiamo quest'ultimo paragrafo all'uso dell'abaco nel sistema metrico decimale.

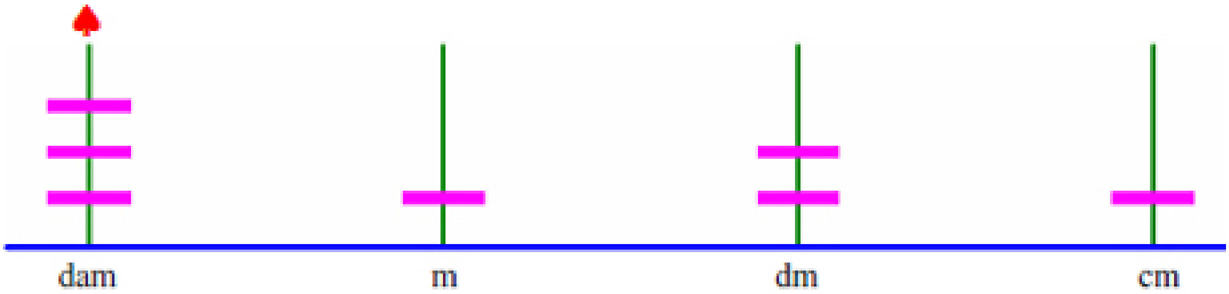
Qui il *cappuccetto* – se collocato in una qualsiasi delle asticelle – serve a fissare una unità di misura (per esempio, di lunghezza o di capacità); dando dignità – come vedremo – alle equivalenze svolte attraverso le tanto osteggiate scale.

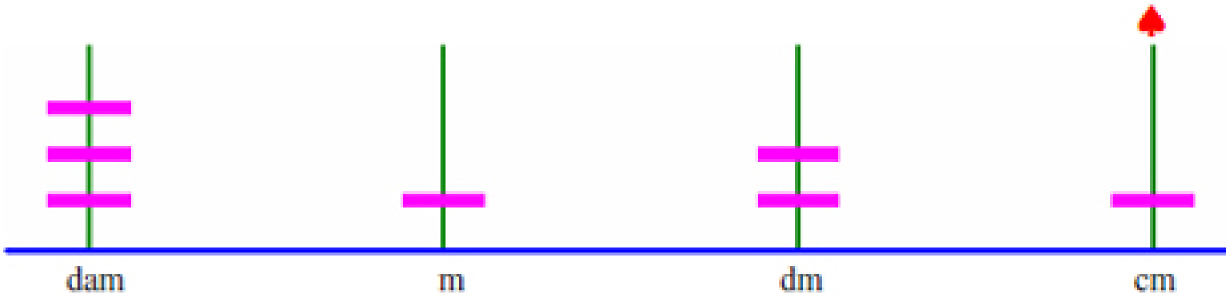
Per esempio, supponiamo che la misura di una lunghezza abbia dato il risultato registrato nelle figure che seguono. La misura effettuata corrisponde a 3 dam *più* 1 m *più* 2 dm *più* 1 cm.

Il *cappuccetto* in questa fase è superfluo. Esso ci dice semplicemente che, nell'usuale rappresentazione in cifre, nel primo caso la virgola la si vuol collocare dopo la cifra dei metri, nel secondo caso la si vuol collocare dopo la cifra dei decimetri e così via. Perciò la virgola ci fa capire su quale asticella è situata l'unità di misura a cui essa corrisponde.







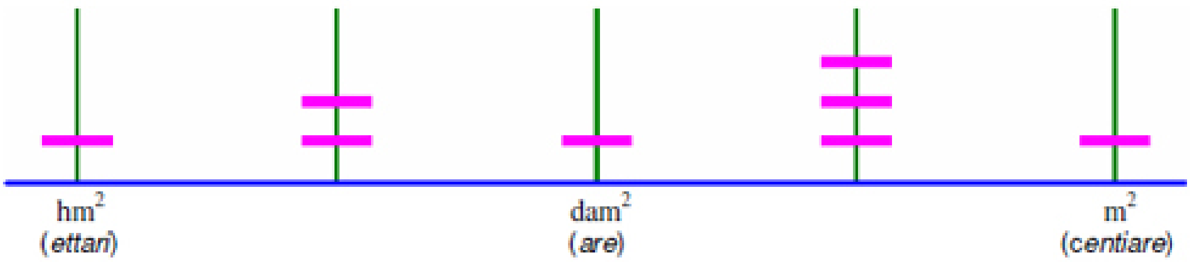


Onde la misura della nostra lunghezza è: 31,21 m = 312,1 dm = 3,121 dam = 3121 cm, e così via.

Facciamo notare che, fissata l'unità di misura, si possono svolgere considerazioni simili a quelle fatte nel paragrafo precedente in riferimento alle torte. Ad esempio, il metro può essere trattato come la classica torta: il centimetro come il centesimo di torta, il decimetro come il decimo di torta, il decametro come una decina di torte …; e così via.

Per le misure di superficie e per quelle di volume va tenuto presente, che – se riferite alle precedenti unità di misura lineari – le prime si susseguono secondo multipli di cento e le altre secondo multipli di mille.

Nella figura seguente si mostra la misura di una superficie. Per evitare di rappresentare i vari casi, il *cappuccetto* è stato sottinteso, dovendo ormai essere chiaro che esso serve solo a segnalare l'unità di misura prescelta e quindi la posizione della virgola nella rappresentazione grafica della misura considerata.



Perciò la misura della superficie è: 1,2131 hm2 = 121,31 dam2 = 12131 m2, e così via.

Bibliografia

[DML] Cosimo De Mitri, Domenico Lenzi, *Fiammiferi e cifre decimali*, Education 2.0, 2010. http://www.educationduepuntozero.it/racconti-ed-esperienze/fiammiferi-cifredecimali-3078923784.shtml

[L] Domenico Lenzi, *Primi passi in aritmetica*, Education 2.0, 2010. http://www.educationduepuntozero.it/racconti-ed-esperienze/primi-passiaritmetica-3055506299.shtml

[PS] Jean Piaget, Alina Szeminska, *La genesi del numero nel bambino*, La nuova Italia, 1968.